

Diffused radiation in semi-infinite and thick plane parallel diffusers with a line source parallel to the surface

R. G. GIOVANELLI

Division of Physics, National Standards Laboratory,
Commonwealth Scientific and Industrial Research
Organization, Sydney.

SUMMARY. — *Formulae are derived for the total intensity of diffused radiation within or at the surface of semi-infinite and thick plane parallel diffusers with a line source parallel to the surface and lying in, or on the surface of the diffuser. Some numerical results are included.*

SOMMAIRE. — *On établit des formules pour l'intensité totale du rayonnement diffusé à l'intérieur ou à la surface de diffuseurs semi-infinis ou plan-parallèles épais, avec une source linéaire parallèle à la surface et située à l'intérieur ou à la surface du milieu diffusant. Quelques résultats numériques sont indiqués.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Für einen Streukörper, der als einseitig unendlich ausgedehnter Körper oder als dicke planparallele Platte vorliegt, werden die Formeln für die Gesamtintensität der Streustrahlung im Innern und an der Oberfläche abgeleitet. Dabei wird die Lichtquelle als linear unendlich und parallel zur Grenzfläche angesetzt und liegt im Innern oder auf der Oberfläche des streuenden Mittels. Für einige besondere Fälle werden Zahlenwerte angegeben.*

I. Introduction. — A number of problems concerning lateral diffusion of radiation in diffusing media of various geometrical forms can be solved using a technique based on a knowledge of the total intensity of diffused radiation at any point when the source is in an infinite diffusing medium. This problem has been discussed recently by JEFFERIES [1] for point and line sources in media having various ratios of scattering and absorption coefficients. Because of the greater mathematical simplicity the present discussion is restricted to line sources.

The technique consists of considering two diffusers placed together so as to construct a composite diffuser of different geometrical form in which the total intensity of diffused radiation is known or can be evaluated to a sufficient degree of approximation. Suppose the two diffusers are denoted by A and B, and the total intensity in A is required when B is removed. Since the total intensity in the composite diffuser, at a point in A, is due to radiation which has reached this point without leaving A, together with radiation which has passed once or more through B, diffuser B can be regarded as providing a distributed source over the surface of A. If the strength of this distributed source be known together with its effect at the required point in A, the total intensity in A when B is removed can be obtained by subtraction.

It will be seen later that there may be alternative ways of formulating the effects of the distributed source, and that one of these usually results in an integral equation or simultaneous integral equations for the total intensity. In some cases, however, other alternatives enable the total intensity to be found in terms of integrals of known functions, which can be evaluated numerically.

This technique was used by the author [2] in discussing the intensity at the surface of a semi-infinite diffuser for an infinite line source on the surface (necessitating the solution of an integral equation) or beneath the surface (for which a solution was obtained involving merely numerical integration). In the present paper solutions are given for a number of cases which do not involve integral equations, including the total intensities in semi-infinite and in thick plane parallel diffusers for a line source on the surface or within the medium and parallel to the surface.

II. Semi-infinite diffuser and line source on the surface. — Consider a diffusing medium scattering isotropically with scattering coefficient σ , absorption coefficient α , extinction coefficient $\kappa = \sigma + \alpha$, and albedo for single scattering $\bar{\omega}_0 = \frac{\sigma}{\kappa}$. The medium is

supposed to consist of scattering particles and absorbing particles embedded in a clear or absorbing matrix of refractive index N . If N exceeds unity, some of the radiation incident on the surface from within the diffuser is internally reflected, and to simplify the treatment, we suppose this to be uniformly diffused.

In the case of a line source emitting flux $4\pi Q$ per unit length in an infinite diffuser, let the total intensity J of diffused radiation at distance ρ from the source be denoted by

$$(2.1) \quad J = QF(\rho).$$

With the same source on the surface of a semi-infinite medium, emitting flux $2\pi Q$ per unit length into the diffuser, let the total intensity of outwardly directed diffused radiation just below the surface at distance r from the source be denoted by

$$(2.2) \quad J = Q \varphi(r).$$

When $N = 1$, there is no surface reflection and (2.2) gives the total intensity of all the diffused radiation at the surface; but when $N > 1$, only the fraction \mathfrak{J}/N^2 of uniformly diffused radiation incident from within passes through the surface, \mathfrak{J} being the transmittance of the surface to uniformly diffused radiation incident from air, and the total intensity of all the diffused radiation is

$$(2.3) \quad J = Q \varphi(r) \left(2 - \frac{\mathfrak{J}}{N^2} \right).$$

On a plane at depth z below the surface and at distance R from the projection of the source on this plane, let the total intensity of diffused radiation be denoted by

$$(2.4) \quad J = Q \Pi(R, z).$$

If a second similar semi-infinite medium B be placed almost in contact with the first (called A), the source radiating flux $2\pi Q$ per unit length into each medium, the intensity is everywhere equal to that in an infinite medium; for by symmetry the intensities are the same on either side of the interface, and loss of radiation passing from B to A due to internal reflection in B is exactly counterbalanced by radiation internally reflected within A. Then J is given by (2.1) (where $\rho = \sqrt{R^2 + z^2}$), and the general technique described above can be used to derive the function $\Pi(R, z)$, as follows.

In the composite infinite medium, the total intensity of diffused radiation may be regarded as composed of three components:

(i) The first is $Q \Pi(R, z)$, due to radiation which has not passed through medium B.

(ii) The second is due to radiation which would have passed out of a single semi-infinite medium but which now enters the other semi-infinite medium. This is equivalent to a distributed source along the interface, whose strength may be found by assuming that for a semi-infinite diffuser the radiation incident on the surface from within is isotropic; thus flux $\frac{1}{2} Q \varphi(r)$ is incident on unit area of surface at distance r

from the source, and flux $\frac{\mathfrak{J}}{2N^2} Q \varphi(r)$ is transmitted. It follows that the surface transmits, or effectively emits, in all directions, i.e. into the two media A and B, a flux of $\frac{\mathfrak{J}}{N^2} Q \varphi(r)$ per unit area. Because the two media almost in contact are equivalent to an infinite medium the distributed surface source results to a close approximation (as has been shown before [2]) in a second contribution to the total intensity of diffused radiation at (R, z) amounting to

$$(2.5) \quad \frac{Q \mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) F(\rho') dr$$

where

$$\rho' = \sqrt{(r - R)^2 + z^2}.$$

(iii) The contribution from the surface source has not been completely evaluated, however, in (2.5). The function $Q F(\rho)$ represents only the total intensity of *diffused* radiation at distance ρ from a line source emitting flux $4\pi Q$ per unit length in an infinite medium. It is necessary to distinguish from the diffused radiation the residual radiation *direct* from the source and which has not as yet been scattered or absorbed; this is referred to as direct radiation. Its importance in the present context is that the *direct* radiation received at (R, z) from the distributed surface source forms part of the *diffused* radiation due to the line source, but it is not included in (2.5). To evaluate the contribution of the direct radiation to the total intensity, it will be noted that, on the assumption of uniformly diffused transmitted radiation, the directional intensity at the interface due to the distributed source

is $\frac{\mathfrak{J}}{2\pi N^2} Q \varphi(r)$. With a rectangular co-ordinate system,

r, l on the interface, in which the l axis coincides with the line source and the r axis contains the projection of a point (R, z) onto the interface, the directional intensity at (R, z) of direct light from r, l is

$$\frac{\mathfrak{J}}{2\pi N^2} Q \varphi(r) e^{-\kappa \rho''}$$

where $\rho'' = \sqrt{(r - R)^2 + z^2 + l^2}$. The total intensity due to this component is thus

$$(2.6) \quad \frac{\mathfrak{J} Q}{2\pi N^2} \int \varphi(r) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

Combining the above three contributions,

$$Q F(\rho) = Q \Pi(R, z) + \frac{Q \mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) F(\rho') dr + \frac{Q \mathfrak{J}}{2\pi N^2} \int \varphi(r) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

from which the solution follows

$$(2.7) \quad \Pi(R, z) = F(\rho) - \frac{\mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) F(\rho') dr - \frac{\mathfrak{J}}{2\pi N^2} \int \varphi(r) e^{-\kappa \rho''} d\Omega.$$

At large enough depths, the final term is negligible, while $F(\rho')$ has an almost constant value $F(\rho)$ over the range of r in which $\varphi(r)$ has significant values.

Thus

$$\frac{\mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) F(\rho') dr \approx \frac{\mathfrak{J} F(\rho)}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) dr.$$

But from the integral properties of $\varphi(r)$

$$\frac{\mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) dr = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{J}}$$

where \mathfrak{R} is the reflectance of the semi-infinite diffuser for diffused incident radiation, omitting FRESNEL reflectance of the surface, or $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_D - (1 - \mathfrak{J})$ where \mathfrak{R}_D is the total reflectance for diffused incident radiation. Hence at large depths

$$\frac{\mathfrak{J}}{4\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) F(\rho') dr = \frac{\mathfrak{R}F(\rho)}{\mathfrak{J}}$$

and so

$$(2.8) \quad \Pi(R, z) = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{J}}\right) F(\rho).$$

If $N = 1$, then $\mathfrak{J} = 1$ and $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_D$; thus (2.8) simplifies to

$$(2.9) \quad \Pi(R, z) = (1 - \mathfrak{R}) F(\rho).$$

As an alternative to (ii), it would have been possible to consider this component as due to radiation which, after one or more passages through medium B, enters medium A and proceeds to the point (R, z) without further passage through medium B. Since in an infinite medium the diffused radiation at any point is almost isotropic, the flux incident on unit area of the surface of the interface at distance r from the source is very nearly $\frac{J}{4}$, or $\frac{1}{4} QF(r)$; the flux transmitted into medium A is thus

$$\frac{\mathfrak{J}}{4N^2} QF(r)$$

per unit area, and the corresponding contribution to the total intensity at the point (R, z) is

$$\frac{\mathfrak{J}Q}{8\pi N^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(r) \Pi(R - r, z) dr.$$

There would be a corresponding change in component (iii). However, this alternative point of view would lead to an integral equation for $\Pi(R, z)$ in place of (2.7) and will therefore not be pursued, though since the radiation field is closer to isotropic in an infinite medium than at the surface of a semi-infinite medium the integral equation would be a better physical formulation of the problem than (2.7).

The function $\kappa^{-1} \Pi(R, z)$ has been computed for two values of ϖ_0 (299/300 and 74/75) for which $F(\rho)$ has been given by JEFFERIES [1] and for two values of N (1 and 1.5) for which $\varphi(r)$ has been given by the author [2]. Results are presented in Tables 1 and 2, where $Y = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa R$ and $\bar{z} = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa z$. For $\bar{z} = 0$, the results are those derived previously [2]; for the other values of \bar{z} , the final term in equation (2.7) is negligible. The values of the functions may be in error by several per cent because of uncertainties in the functions $F(\rho)$ and $\varphi(r)$ and because of approximations in the analysis presented above.

TABLE 1

The function $\kappa^{-1} \Pi(R, z)$

$$\varpi_0 = 299/300$$

$$Y = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa R; \quad \bar{z} = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa z$$

$$N = 1$$

Y	0	0.25	0.5	0.75
$\bar{z} = 0$	3.904	0.528	0.179	0.064
0.25	2.350	1.896	0.596	0.105
0.5	1.164	0.956	0.619	0.345
0.75	0.722	0.621	0.461	0.325
N = 1.5				
$\bar{z} = 0$	8.609	2.197	0.896	0.426
0.25	3.920	2.632	1.315	0.716
0.5	2.072	1.757	1.194	0.734
0.75	1.279	1.170	0.889	0.646
Approximate values from equation (2.9)				
N = 1				
$\bar{z} = 0.75$	0.456	0.428	0.362	0.289

TABLE 2

The function $\kappa^{-1} \Pi(R, z)$

$$\varpi_0 = 74/75$$

$$Y = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa R; \quad \bar{z} = \sqrt{3(1 - \varpi_0)} \kappa z$$

$$N = 1$$

Y	0	0.5	1.0	1.5
$\bar{z} = 0$	3.966	0.460	0.129	0.034
0.5	1.793	1.000	0.400	0.150
1.0	0.765	0.596	0.326	0.161
1.5	0.365	0.312	0.214	0.126
N = 1.5				
$\bar{z} = 0$	8.355	1.697	0.599	0.219
0.5	2.883	1.820	0.834	0.362
1.0	1.296	1.044	0.618	0.332
1.5	0.633	0.552	0.392	0.242
Approximate values from equation (2.9)				
N = 1				
$\bar{z} = 1.5$	0.300	0.269	0.204	0.138

Values obtained from the approximate relation (2.9) when $N = 1$ are also given in these Tables for the largest values of \bar{z} . It will be seen that for the largest values of Y and \bar{z} this relation holds to within 10 per cent, and the accuracy is expected to increase with depth.

III. Semi-infinite diffuser containing a line source parallel to the surface. — Consider a line source emitting flux $4\pi Q$ per unit length at depth Z within a semi-infinite diffuser whose matrix has refractive index unity, and let the total intensity of diffused radiation at (R, z) be $Q\psi(R, z, Z)$, where R is now the distance between the projections of the point and of the line source onto the surface.

Let a second similar medium B be placed in contact with the surface of the first medium A. The total intensity of diffused radiation at (R, z) then becomes $QF(\rho)$, where $\rho = \sqrt{(Z-z)^2 + R^2}$. This may be regarded as composed of three components.

(i) The first is $Q\psi(R, z, Z)$ due to radiation which has not passed through medium B.

(ii) The second is due to diffused radiation from the distributed surface source represented by the adjacent surface of medium B. In this case it is best evaluated by considering the radiation returning from medium B to medium A after any number of passages through medium B. Since the flux crossing the interface into medium A is very closely

$$\frac{Q}{4} F(\sqrt{r^2 + Z^2})$$

per unit area at distance r from the projection of the source on the interface, this contribution is

$$\frac{Q}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) \Pi(R-r, z) dr,$$

where $\Pi(R-r, z)$ is as given by (2.7) with $N=1$.

(iii) Finally, direct radiation from the interface gives a contribution

$$\frac{Q}{4\pi} \int F(\sqrt{r^2 + Z^2}) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

On adding the three contributions the solution follows:

$$(3.1) \quad \psi(R, z, Z) = \\ = F(\rho) - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) \Pi(R-r, z) dr - \\ - \frac{1}{4\pi} \int F(\sqrt{r^2 + Z^2}) e^{-\kappa \rho''} d\Omega.$$

At large enough depths the final term may be neglected. If in addition the distance of the point (R, z) from the projection of the source onto the surface is large compared with Z , then $\Pi(R-r, z)$ has an almost constant value $\Pi(R, z)$ over the range of r in which $F(\sqrt{r^2 + Z^2})$ has significant values, and

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) \Pi(R-r, z) dr \\ \approx \frac{\Pi(R, z)}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) dr \\ = \frac{1-\Re}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) dr. \end{aligned}$$

Hence at large depths

$$(3.2) \quad \psi(R, z, Z) = F(\rho) - \frac{1-\Re}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + Z^2}) dr.$$

The above results can be used in deriving the total intensity $Q\psi(R, z, Z, N)$ in a semi-infinite medium whose matrix has a refractive index N greater than unity. The total intensity may be regarded as consisting of five components.

(i) The first, due to radiation which has not been reflected by the surface, is clearly

$$Q\psi(R, z, Z).$$

(ii) Diffused radiation, incident on and internally reflected at the surface, diffuses through the medium and gives rise to a second component of the total intensity. Assuming that the incident diffused radiation is isotropic, the diffused flux per unit area incident on the surface for the first time is $\frac{1}{2} Q\theta(r)$, where

$\theta(r) = \psi(r, 0, Z)$, and the fraction internally reflected is $1 - \Im/N^2$. This results in a contribution

$$\frac{Q(1 - \Im/N^2)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r) \Pi(R-r, z) dr,$$

where $\Pi(R-r, z)$ is as given by (2.7) with the refractive index equal to N .

(iii) The corresponding contribution due to direct radiation from the surface is

$$\frac{Q(1 - \Im/N^2)}{2\pi} \int \theta(r) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

(iv) It can readily be shown [2] that direct radiation from the source produces illumination $E(r)$ on the surface, where

$$E(r) = 2QZ \int_{\sqrt{Z^2+r^2}}^{\infty} \frac{e^{-\kappa x}}{x^2 \sqrt{x^2 - Z^2 - r^2}} dx.$$

If the fraction $1 - t(r)$ of this radiation is reflected internally, subsequent scattering results in a contribution to the total intensity of diffused radiation given approximately by

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(r) [1 - t(r)] \Pi(R-r, z) dr.$$

(v) The corresponding contribution due to direct radiation from the surface is given approximately by

$$\frac{1}{\pi} \int E(r) [1-t(r)] e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

It follows that

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi(R, z, Z, N) = & \psi(R, z, Z) + \\ & + \frac{1 - \beta/N^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r) \Pi(R-r, z, z) dr + \\ & + \frac{1 - \beta/N^2}{2\pi} \int \theta(r) e^{-\kappa \rho''} d\Omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(r)}{Q} [1-t(r)] \Pi(R-r, z) dr + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \frac{E(r)}{Q} [1-t(r)] e^{-\kappa \rho''} d\Omega. \end{aligned}$$

At sufficient depths, the third and fifth terms on the right hand side are negligible, and if the source is deep enough the fourth term is negligible.

IV. Thick plane parallel diffuser containing a line source parallel to the surface. — For a plane parallel medium of arbitrary thickness the total intensity distribution can be found only with considerable difficulty, but if the thickness be great enough the problem can be simplified and treated by the method outlined above.

Consider first a plane parallel diffuser of thickness ζ , $N=1$, containing an infinite line source emitting flux $4\pi Q$ per unit length parallel to and at distance Z from the nearer surface [surface (1)]. At a point (R, z) , where R is the distance between the projections of the point and of the source on surface (1), let the total intensity of diffused radiation be denoted by

$$J = Q \Lambda(R, z, Z).$$

Now let a semi-infinite diffuser of the same type be placed in contact with surface (2). The total intensity of diffused radiation is then increased to $Q \psi(R, z, Z)$. This may, however, be regarded as composed of three components.

(i) The first is $Q \Lambda(R, z, Z)$ due to radiation which has not passed outside the plane parallel diffuser.

(ii) The second is due to the distributed source representing the surface of the juxtaposed semi-infinite diffuser. Provided the thickness ζ is sufficiently great, the diffused radiation at the interface may be regarded as isotropic and there is hence a flux of $\frac{Q}{4} \psi(r, \zeta, Z)$ per unit area passing from one medium to the other at distance r from the projection of the line source on the interface. Provided the thickness ζ is sufficiently great, we can approximate to the resulting contribution to the total intensity of diffused radiation at R, z by now regarding the plane parallel layer as a semi-infinite diffuser; the contribution is

$$\frac{Q}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \zeta, Z) \Pi(R-r, \zeta-z) dr,$$

where $\Pi(R-r, \zeta-z)$ is as given by (2.7) with $N=1$.

For small values of z , i.e., near surface (1), this expression is not a good approximation to contribution (ii), but as ζ is large the contribution there is small in any case, and the error insignificant.

(iii) Finally, the contribution due to direct light from the interface is obtained by noting that the directional intensity at the interface is $\frac{Q}{4\pi} \psi(r, \zeta, Z)$. Hence the directional intensity at R, z due to direct light from the point (r, ζ, l) is

$$\frac{Q}{4\pi} \psi(r, \zeta, Z) e^{-\kappa \rho'''}$$

where $\rho''' = \sqrt{(\zeta-z)^2 + (R-r)^2 + l^2}$, and the total intensity due to this component is

$$\frac{Q}{8\pi} \int \psi(r, \zeta, Z) e^{-\kappa \rho'''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

It may be noted that because of the thickness of the plane parallel layer, illumination of the juxtaposed semi-infinite diffuser by direct light from the source and the corresponding contribution to the total intensity of diffused radiation at R, z are negligible.

Combining the three contributions it follows that

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Lambda(R, z, Z) = & \psi(R, z, Z) - \\ & - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \zeta, Z) \Pi(R-r, \zeta-z) dr - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int \psi(r, \zeta, Z) e^{-\kappa \rho'''} d\Omega. \end{aligned}$$

Except near the second surface, the final term may be neglected, while far enough from the second surface (2.8) applies, in which case

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Lambda(R, z, Z) = & \psi(R, z, Z) - \\ & - \frac{1 - \beta}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \zeta, Z) F(\sqrt{[r-R]^2 + [\zeta-z]^2}) dr. \end{aligned}$$

On the second surface it can readily be seen that (4.1) may be replaced by

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Lambda(R, \zeta, Z) = & \psi(R, \zeta, Z) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \zeta, Z) \varphi(R-r) dr. \end{aligned}$$

In the special case when the source is on the surface (taken as surface (1)), then $Z=0$ and (4.1) is replaced by

$$\begin{aligned} \Lambda(R, z, 0) = & \Pi(R, z) - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(r, \zeta) \Pi(R-r, \zeta-z) dr - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int \Pi(r, \zeta) e^{-\kappa \rho'''} d\Omega, \end{aligned}$$

and since ζ is large, (2.8) may be used, so that

$$(4.4) \quad \Lambda(R, z, 0) = \Pi(R, z) - \frac{1-\Re}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{\zeta^2 + r^2}) \Pi(R-r, \zeta-z) dr - \frac{1-\Re}{4\pi} \int F(\sqrt{\zeta^2 + r^2}) e^{-\kappa \rho''} d\Omega.$$

Except near the second surface the final term may be neglected, and far enough away from the second surface (2.8) may be used again, giving

$$(4.5) \quad \Lambda(R, z, 0) = \Pi(R, z) - \frac{(1-\Re)^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{\zeta^2 + r^2}) F(\sqrt{[R-r]^2 + [\zeta-z]^2}) dr.$$

If $z = 0$, i.e., on the same surface as the source, $\Pi(R, z)$ in (4.5) is, of course, replaced by $\varphi(R)$.

On the second surface, (4.4) may be replaced by

$$\Lambda(R, \zeta, 0) = \Pi(R, \zeta) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(r, \zeta) \varphi(R-r) dr$$

which, from (2.8), becomes

$$(4.6) \quad \Lambda(R, \zeta, 0) = (1-\Re) F(\sqrt{R^2 + \zeta^2}) - \frac{1-\Re}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{r^2 + \zeta^2}) \varphi(R-r) dr.$$

We can now obtain the total intensity of diffused radiation $Q\Lambda_1(R, z, Z, N)$ in a thick plane parallel diffuser whose matrix is of refractive index N , one surface being in contact with air, the other with a non-diffusing medium of refractive index N . If the source is not close to the latter surface, so that negligible direct light passes through it, suppose the non-diffusing medium of refractive index N to be replaced by a semi-infinite diffuser of the same type as the plane parallel layer, the total intensity of diffused radiation at any point being then increased to $Q\psi(R, z, Z, N)$, where z and Z are measured from the air-diffuser surface. Using a similar argument to that above, it follows that to a good approximation

$$(4.7) \quad \Lambda_1(R, z, Z, N) = \psi(R, z, Z, N) - \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, \zeta, Z, N) \Pi(R-r, \zeta-z) dr - \frac{1}{4\pi} \int \psi(r, \zeta, Z, N) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

where in the final term, which is negligible if $\zeta - z$ is not too small, the integral is taken over a hemisphere, and in the penultimate term $\Pi(R-r, \zeta-z)$ refers to a semi-infinite diffuser where $N = 1$.

If the source is close to the surface in contact with the non-diffusing medium of refractive index N , the diffused radiation may be regarded as that present without having undergone reflection at the air-diffuser surface, together with radiation which has been reflected there.

(i) The first contribution, due to radiation not reflected at this surface, is

$$Q \Lambda(R, \zeta - z, \zeta - Z),$$

the distances z and Z being measured from the air-diffuser surface as before.

(ii) Assuming isotropic radiation, the diffused flux per unit area incident on the air-diffuser surface for the first time is $\frac{1}{2} Q \Lambda(r, \zeta, \zeta - Z)$ and the fraction internally reflected is $1 - \Im/N^2$. Since ζ is large, we can approximate to the resulting contribution to the total intensity of diffused radiation at R, z by now regarding the plane parallel layer as a semi-infinite diffuser; the contribution is thus

$$\frac{Q(1-\Im/N^2)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(r, \zeta, \zeta - Z) \Pi(R-r, z) dr,$$

where $\Pi(R-r, z)$ is given by (2.7) with a refractive index N .

(iii) The corresponding contribution due to direct light from the surface is

$$\frac{Q(1-\Im/N^2)}{2\pi} \int \Lambda(r, \zeta, \zeta - Z) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

the integral being taken over a hemisphere.

Because of the thickness of the layer and the position of the source, illumination of the air-diffuser surface by direct light from the source and the corresponding contribution to the total intensity of diffused radiation at R, z are negligible.

Hence it follows that for $\zeta - Z$ small

$$(4.8) \quad \Lambda_1(R, z, Z, N) = \Lambda(R, \zeta - z, \zeta - Z) + \frac{1-\Im/N^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(r, \zeta, \zeta - Z) \Pi(R-r, z) dr + \frac{1-\Im/N^2}{2\pi} \int \Lambda(r, \zeta, \zeta - Z) e^{-\kappa \rho''} d\Omega.$$

For z sufficiently large, the final term is negligible.

In a thick plane parallel layer whose matrix is of refractive index N , both surfaces being in contact with air, the total intensity of diffused radiation $Q\Lambda_2(R, z, Z, N)$ may be obtained by a repetition of the above procedure. If z and Z are measured from the surface nearer the source, it is found that to good approximation

$$(4.9) \quad \Lambda_2(R, z, Z, N) = \Lambda_1(R, z, Z, N) + \frac{1-\Im/N^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_1(r, \zeta, Z, N) \Pi(R-r, \zeta-z) dr + \frac{1-\Im/N^2}{2\pi} \int \Lambda_1(r, \zeta, Z, N) e^{-\kappa \rho''} d\Omega,$$

where $\Lambda_1(R, z, Z, N)$ and $\Lambda_1(r, \zeta, Z, N)$ are given by (4.7), and the integral in the final term is taken over a hemisphere. The final term is negligible when $\zeta - z$ is sufficiently large.

V. Discussion. — The method outlined above for obtaining the total intensity of diffused radiation in diffusers is of general application. It may be applied to diffusers of any geometrical form if, by the addition of one or more diffusers, (i) a composite diffuser is formed in which the total intensity of diffused radiation is known, and (ii) the radiation is effectively isotropic at all points on the interface or interfaces. In many cases, however, it is not possible to avoid the solution of integral equations.

VI. Acknowledgment. — The author's thanks are due to Dr G. H. BRIGGS for valuable discussions on this subject.

REFERENCES

- [1] J. T. JEFFERIES, *Opt. Acta*, **2**, 1955, p. 109.
[2] R. G. GIOVANELLI, *Opt. Acta*, **3**, 1956, p. 24.

Manuscrit reçu le 3 juillet 1955.

Application des théories de l'approximation à l'étude des images optiques

J. ARSAC

Observatoire de Meudon

SOMMAIRE. — Un instrument d'optique peut être considéré comme un filtre de fréquences d'espace ne transmettant que les fréquences inférieures à une certaine limite. Il en résulte que l'image, généralement différente de l'objet, ne peut en être qu'une approximation. Une extension du théorème de BERNSTEIN permet de donner les bornes dérivées dans l'image en fonction de la fréquence de coupure et de l'éclairement maximum dans l'image. Un instrument d'optique opère pour l'objet comme un « procédé de sommation » au sens mathématique du terme. Les deux caractéristiques de ces procédés : puissance (aptitude à reproduire des objets plus ou moins réguliers), saturation (impossibilité pour l'écart entre objet et image de descendre en dessous d'une certaine valeur) apparaissent comme des critères utiles pour la détermination d'un instrument d'optique.

ZUSAMMENFASSUNG. — Ein optisches Instrument kann betrachtet werden als ein Filter für die Frequenzen der Fourier-Zerlegung, das nur Frequenzen unterhalb einer gewissen Grenze durchlässt. Daraus ergibt sich, dass das Bild im allgemeinen vom Objekt verschieden ist und nur eine Approximation darstellt. Eine Erweiterung des Satzes von Bernstein gestattet Schranken für die Ableitungen anzugeben als Funktion dieser Grenzfrequenz und der maximalen Bildhelligkeit. Ein optisches Instrument wirkt auf ein Objekt wie ein Summierungsverfahren im eigentlich mathematischen Sinne. Zwei kennzeichnende Eigenschaften solcher Verfahren, nämlich Stärke des Verfahrens (Fähigkeit, mehr oder weniger reguläre Objekte wiederzugeben) und Saturation (Unmöglichkeit, die Differenz der Helligkeiten in Bild und Objekt unter einen bestimmten Betrag zu drücken) erscheinen als nützliche Kriterien bei der Berechnung optischer Instrumente.

SUMMARY. — An optical instrument can be considered as a filter of spacial frequencies which only transmits frequencies below a certain limit. The result is that the image, generally different from the object, can only be an approximation to it. An extension of BERNSTEIN'S theorem makes it possible to give the limits of the derivatives in the image as a function of the frequency of cut-off and of the maximum illumination in the image. An optical instrument operates for the object as a "process of summation" in the mathematical sense of the term. The two characteristics of these processes : power (ability to reproduce more or less regular objects) saturation (inability of the difference between object and image to go below a certain value) appear as useful criteria for the determination of an optical instrument.

Introduction. — Les recherches récentes sur la formation d'une image par un instrument d'optique ont permis d'établir qu'elle se fait le plus souvent par un produit de composition [1], [2], [3], [4].

$$I(x, y) = \iint f(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy',$$

f est la répartition de luminance objet ; g est la figure de diffraction, image d'une source ponctuelle à travers l'instrument. Les variables x, y sont des variables réduites. Si l'on désigne par x, y les coordonnées véritables, et par \underline{x} la distance de l'image au plan de la pupille diffringente,

$$x = \underline{x}/f; y = \underline{y}/f.$$

Nous limiterons notre étude au cas de l'éclairage incohérent. Le cas de l'éclairage cohérent se traiterait suivant les mêmes méthodes. Nous ne nous occupons pas de l'intervention des fluctuations. Dans ces conditions, les fonctions f, g, I , sont des fonctions positives et certaines.

A la suite des travaux de M. P. DUFFIEUX et de ses élèves, on sait que l'on peut considérer un instrument d'optique comme un filtre de fréquences d'espace. En effet, si l'on désigne par $T(f)$ la transformée de FOURIER de la fonction $f(x, y)$

$$T(f) = F(u, v) = \iint f(x, y) e^{-2\pi i(ux + vy)} dx dy$$

(l'intégrale étant étendue à tout le plan des x, y), la relation entre f et I équivaut à

$$T(I) = T(f) \cdot T(g);$$

u, v sont des variables réduites dans le plan de la pupille diffringente. Si ξ, η sont des coordonnées véritables dans ce plan,

$$u = \frac{\xi}{\lambda}; v = \frac{\eta}{\lambda}.$$

La fonction $T(g)$ est généralement nulle en dehors d'un domaine fini D . Il en résulte que $I(x, y)$ diffère de $f(x, y)$ parce que $T(I)$ est nulle en dehors du domaine

D alors que $T(f)$ peut y prendre des valeurs quelconques et que d'autre part $T(I)$ diffère de $T(f)$ dans D si $T(g)$ est différent d'une constante.

Nous supposons que la pupille diffringente peut être inscrite dans un cercle de rayon r . Alors, le domaine D peut être inscrit dans un cercle de rayon

$$L = \frac{2r}{\lambda}.$$

Si α' est l'angle sous lequel on voit, de l'image, le rayon r

$$\alpha' = \frac{r}{f}, \quad f = \frac{r}{\alpha'} = \frac{\lambda L}{2\alpha'} \text{ ou } L = \frac{2\alpha' f}{\lambda}.$$

Alors

$$x = \frac{2\alpha' x}{\lambda L}, \quad y = \frac{2\alpha' y}{\lambda L}.$$

Avec ces notations, l'image ne peut contenir des variations sinusoïdales de période plus courte que $\frac{\lambda}{2\alpha'}$

(coordonnées véritables) ou $\frac{1}{L}$ en coordonnées réduites.

On sait que la limitation de $T(g)$ à un domaine fini D est d'une importance capitale car elle limite le pouvoir séparateur d'un instrument d'optique. Nous allons montrer qu'elle limite aussi les variations d'éclairement dans l'image. Une étude de cet effet dans certains cas particuliers a été faite par A. MARÉCHAL [5]. Un théorème dû à L. BERGER permet une évaluation des limites de la variation d'éclairement dans le cas général, mais la borne ainsi obtenue est souvent inutile parce que beaucoup trop large. Une extension du théorème de BERNSTEIN [7] nous permettra d'obtenir une borne plus précise, fonction non plus de l'éclairement total de l'image, mais de la valeur maximum de l'éclairement.

D'un autre côté, l'écart entre $T(I)$ et $T(f)$ dans D a été parfois considéré comme une cause d'erreur supplémentaire. Ceci demande à être précisé. En fait si l'on désire que l'image ressemble à l'objet, on est conduit à rechercher, s'il existe une fonction $T(g)$, nulle en dehors de D , réalisant un optimum pour cette ressemblance. Il faut donc se donner un critère de ressemblance. Si l'on choisit celui de l'écart quadratique moyen minimum entre objet et image, on sait que la fonction $T(g)$ optimum est constante [17] dans D . Mais un tel critère peut paraître défectueux, car il n'exclut pas la possibilité d'un écart important s'il a lieu sur un intervalle suffisamment étroit.

Si l'on propose de réduire le plus possible l'écart entre I et f en tout point les résultats sont plus complexes. Nous ferons apparaître deux qualités des instruments d'optique à partir de deux caractéristiques de $T(g)$:

1°) *Puissance de $T(g)$* ou possibilité pour l'instrument de former des images correctes d'objets représentés par des fonctions f plus ou moins régulières; 2°) *Saturation de l'approximation*, ou limite à laquelle le maximum de l'écart entre objet et image sera toujours supérieur, quel que soit l'objet.

Les deux qualités ci-dessus, partiellement contradictoires conduiront à une forme favorable de la fonction $T(g)$.

I. — LIMITATION DES VARIATIONS D'ÉCLAIREMENT DANS L'IMAGE.

Rappelons l'énoncé du théorème de BERNSTEIN [7]. Soit une somme d'exponentielles

$$S = \sum_{p=p_1}^{p=p_2} a_p e^{2\pi i u_p x}.$$

Si les hypothèses suivantes sont réalisées :

- a) S est borné en module par $B(S)$: $|S| \leq B(S)$;
- b) u_p est borné en module par L : $|u_p| \leq L$

alors
$$\left| \frac{d^p S}{dx^p} \right| \leq (2\pi L)^p B(S).$$

Comme ce théorème ne fait intervenir que les bornes de S et u_p et non le nombre de termes de la somme S , on peut par un passage à la limite, l'étendre au cas des intégrales (appendice I).

Soit une fonction $f(x)$ dont la transformée de FOURIER est nulle en dehors du segment $-L, +L$

$$f(x) = \int_{-L}^{+L} F(u) e^{2\pi i u x} du$$

si $f(x)$ est bornée en module par $B(f)$, alors

$$\frac{d^p f}{dx^p} \text{ existe et } \left| \frac{d^p f}{dx^p} \right| \leq (2\pi L)^p B(f)$$

L a été défini plus haut
$$\left(L = \frac{2r}{\lambda} = \frac{2\alpha' f}{\lambda} \right).$$

Si l'on compare cette borne à celle que donne L. BERGER [6]

$$\frac{d^p f}{dx^p} = (2\pi i)^p \int_{-L}^{+L} u^p F(u) e^{2\pi i u x} du$$

$$\left| \frac{d^p f}{dx^p} \right| \leq (2\pi)^p L^p \cdot 2LB(f) \leq \frac{1}{\pi} (2\pi L)^{p+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f| dx$$

on constate qu'elle lui est très inférieure car elle est de l'ordre de L^p et non L^{p+1} , et elle ne dépend que de la valeur maximum de f et non de l'intégrale de $|f|$.

On peut étendre le résultat au cas de deux variables (appendice II).

Inscrivons le domaine D en dehors duquel la transformée de FOURIER de f est nulle dans un cercle de rayon R . Il vient alors

$$\left| \frac{\partial^{p+r} f}{\partial x^p \partial y^r} \right| \leq (2\pi R)^{p+r} B(f).$$

On peut encore écrire en désignant par P le point x, y et par $f(P)$ la valeur $f(x, y)$

$$|f(P') - f(P)| \leq (2\pi R) |PP'| B(f),$$

ou encore

$$|f(P) + f(P') - 2f(P'')| \leq (2\pi R)^2 \left| \frac{PP'}{2} \right|^2 B(f)$$

en appelant P'' le milieu du segment PP' .

Si l'on applique ceci aux images optiques, la transformée de I étant nulle en dehors d'un domaine fini D , les dérivées de I vérifient les relations ci-dessus. Mais nous devons considérer u et v comme des coordonnées réduites dans le plan de la pupille diffringente (l'unité de longueur étant la longueur d'onde) et x, y comme des coordonnées réduites dans le plan de l'image, (l'unité étant la distance f entre le plan de la pupille et le plan image, du moins au voisinage de l'axe). Si la pupille peut être inscrite dans un cercle de rayon r , D peut être inscrit dans un cercle de rayon $R = \frac{2r}{\lambda}$.

Si α' est l'angle sous lequel on voit de l'image à la distance f le rayon r

$$|I(M') - I(M)| < \pi \left(2 \frac{\alpha' f}{\lambda} \right) \frac{MM'}{f} B(I)$$

car I étant positif,

$$\left| I - \frac{B(I)}{2} \right| \leq \frac{B(I)}{2}.$$

Par exemple si l'on forme l'image d'un bord d'écran (fig. 1) $I(M') - I(M) = B(I)$

Il vient

$$1 \leq \frac{2\pi\alpha'}{\lambda} \Delta x$$

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2\pi\alpha'}$$

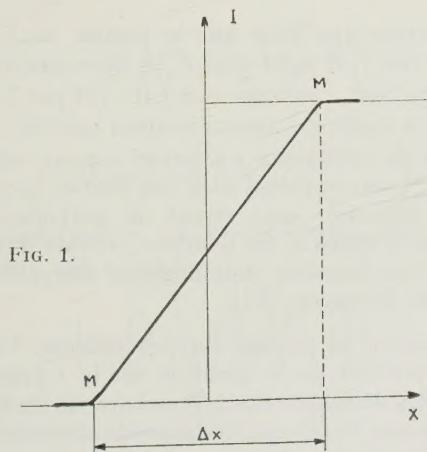


FIG. 1.

Une telle borne ne peut du reste être atteinte à cause de la continuité de $I(x)$. Si l'on représente MM' par un arc de sinuséide, on a alors :

$$I(x) = \frac{1}{2} B(I) \left[1 - \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\Delta x} \right]$$

I' atteint alors la valeur $\frac{1}{2} B(I) \left(\frac{\pi}{\Delta x} \right)^2$.

Donc

$$\left(\frac{\pi}{\Delta x} \right)^2 B(I) \leq \left(\frac{4\pi\alpha'}{\lambda} \right)^2 B(I) ; \quad \Delta x \geq \frac{\lambda}{4\alpha'}.$$

La valeur obtenue dans ce cas-là par MARÉCHAL est $\frac{3\pi\lambda}{16\alpha'}$. Le théorème de BERNSTEIN fournit donc un ordre de grandeur satisfaisant des limitations des dérivées de l'image.

II. — ETUDE DES DÉFAUTS DE L'IMAGE

A. Formation d'une image par un appareil à pupille discontinue. — Pour faciliter ce qui suit, nous supposons le problème à une seule dimension. f, g, I sont indépendants de y .

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g(x - x') dx',$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du.$$

Supposons que l'on recouvre la pupille de l'appareil d'un écran percé de fentes équidistantes, et infiniment fines. Soit a la distance de deux fentes. La distance réduite est $a = a/\lambda$.

Si $A(u)$ est la répartition d'amplitude complexe dans la pupille diffringente quand l'objet se réduit à un point, la présence de l'écran à fentes remplace la courbe continue par la succession de valeurs discrètes $A(pa)$ et $g(x)$ devient

$$g(x) = \left| \sum_{-n'}^{+n'} A(pa) e^{2\pi i p a x} \right|^2 \quad \text{avec } (2n' + 1)a = L$$

ou encore

$$g(x) = \sum_{-n}^{+n} G(pa) e^{2\pi i p a x}$$

au lieu de

$$g(x) = \int_{-L}^{+L} G(u) e^{2\pi i u x} du,$$

G est la transformée de FOURIER de g et résulte du produit de composition de A par elle-même.

La fonction $g(x)$ est donc maintenant un polynôme trigonométrique. Les intégrales sont remplacées par des sommes. L'appareil n'est apte à reproduire que les fonctions susceptibles d'une représentation

$$f(x) = \sum_{-n}^{+n} c_p e^{2\pi i p a x}$$

c'est-à-dire les fonctions nulles en dehors de l'intervalle $-\frac{1}{2a}, +\frac{1}{2a}$ ou encore périodiques de période $\frac{1}{a}$. Soit $E\left(\frac{1}{2a}\right)$ l'ensemble de ces fonctions. Si $f(x)$

appartient à $E\left(\frac{1}{2a}\right)$, l'instrument muni du diaphragme à fentes en donnera l'image

$$I(x) = \sum_{-n}^{+n} G(p_a) c_p e^{2\pi i p a x}.$$

On substitue à la fonction inconnue $f(x)$ un polynôme trigonométrique. Si l'on désire que l'image ressemble à l'objet, il suffit de choisir $G(u)$ pour que $I(x)$ réalise une approximation de $f(x)$. On est donc ramené au problème de l'approximation d'une fonction par un polynôme trigonométrique. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Nous résumerons ici les résultats obtenus [8] [9] [16].

1. Données mathématiques. — Etant donné une fonction $f(x)$, périodique de période $2X$, intégrable sur une période, on définit ses coefficients de FOURIER

$$c_p = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} f(x) e^{-i p \pi \frac{x}{X}} dx.$$

a) *Meilleure approximation.* — On peut choisir d'une infinité de manières une fonction $m(t)$, nulle en dehors du segment $-1, +1$, telle que le polynôme trigonométrique de rang n

$$P_n^m = \sum_{-n}^{+n} c_p m\left(\frac{p}{n+1}\right) e^{i p \pi \frac{x}{X}}$$

approche $f(x)$, c'est-à-dire que pour toute valeur de x $|f - P_n^m| \leq r_n$. Si $r_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ on dira que $P_n^m \rightarrow f$.

La fonction $m(t)$ est appelée la fonction sommatoire. Parmi toutes les fonctions $m(t)$ possibles, il en est une et une seule qui rend minimum l'écart r_n (n étant donné). Soit $E_n(f)$ ce minimum. Le polynôme P_n correspondant est dit de « meilleure approximation ». Il est tel que $P_n - f$ prend sur l'intervalle $-X, +X$ (dont une des bornes est exclue) $n+2$ valeurs extrêmes de même grandeur et de signes alternés. Si $f(x)$ possède une dérivée d'ordre p bornée :

$$E_n(f) \leq C_p \frac{B(f^{(p)})}{(n\pi/X)^p}.$$

Si l'on pose $n/2X = L$, on constate que l'argument de l'exponentielle étant borné par $2\pi Lx$ dans P_n^m

$$E_n(f) \leq C_p \frac{B(f^{(p)})}{(2\pi L)^p}$$

quel que soit X . Autrement dit, l'ordre de grandeur de la meilleure approximation ne dépend que de la borne de l'argument de l'exponentielle dans P_n^m . On peut dire aussi qu'elle ne dépend que du rang du dernier harmonique transmis. Les valeurs de C_p sont

$$C_1 = \frac{\pi}{2}, \quad C_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad C_3 = \frac{\pi^3}{24},$$

$$C_2 < C_4 < \dots < \frac{4}{\pi} < \dots < C_3 < C_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Le procédé qui donne la meilleure approximation dépend des propriétés de la fonction f .

b) *Saturation de l'approximation.* — La plupart des procédés d'approximation saturent [10] c'est-à-dire que l'approximation qu'ils donnent ne peut descendre au-dessous d'une certaine valeur. Considérons par exemple le procédé de FEJER défini par $m(t) = 1 - |t|$. Désignons par σ_n la somme correspondante.

$$\sigma_n = \sum_{-n}^{+n} \left[1 - \left|\frac{p}{n+1}\right|\right] c_p e^{i p \pi \frac{x}{X}}.$$

Quelle que soit la fonction f , il y a au moins une valeur de x pour laquelle $|\sigma_n - f|$ dépasse a/n , alors que pour certaines fonctions $|\sigma_n - f| < b/n$ quel que soit x ($a < b$). On dit que ce procédé sature avec l'ordre d'approximation $1/n$.

Le procédé de FOURIER défini par $m(t) = 1$ si $|t| < 1$ et 0 si $|t| > 1$

$$S_n = \sum_{-n}^{+n} c_p e^{i p \pi \frac{x}{X}}$$

ne sature pas. On ne peut pas donner de borne inférieure de l'approximation. Si $E_n(f)$ est la meilleure approximation d'ordre n de f ,

$$|S_n - f| \leq E_n(f) \text{Log } 2\pi n,$$

On constate que pour que la somme de FOURIER converge vers f , il suffit que $E_n(f)$ décroisse plus vite que $1/\text{Log} n$. Si S_n converge vers f , il n'est pas forcé que S_n donne la meilleure approximation possible, mais il n'y a pas de limitation « à priori » pour celle qu'il donne. Ceci se comprend bien car seul le procédé de FOURIER reproduit sans erreur un polynôme trigonométrique d'ordre n . Le meilleur procédé d'approximation d'une fonction indéfiniment dérivable est le procédé de FOURIER [12].

c) *Puissance du procédé d'approximation.* Un autre aspect important de la question est la « puissance » des procédés de sommation. Il peut arriver en effet que pour certaines fonctions, tel procédé n'assure pas la convergence du polynôme vers f , alors qu'un autre procédé, dit plus puissant assure toujours dans les mêmes conditions la convergence. Ainsi le procédé de FEJER assure toujours la convergence si f est continue, alors qu'il n'en est pas ainsi pour le procédé de FOURIER. *Un procédé est d'autant plus puissant que le zéro de $m(t)$ pour $t = 1$ est d'ordre plus élevé.* Au voisinage d'une discontinuité de première espèce, la somme de FOURIER présente le phénomène de GIBBS, alors que la somme de FEJER en est exempte [12].

2. Application à l'optique. — Si l'on applique ceci au cas de l'instrument d'optique muni d'un diaphragme à fentes, on constate qu'il opère comme un procédé de sommation pour l'objet $f(x)$, puisqu'il en fournit l'approximation

$$I(x) = \sum_{-n}^{+n} c_p G(pa) e^{2i\pi pax}.$$

Si l'on pose $2a = \frac{1}{X}$ on voit que l'objet doit appartenir à la classe $E(X)$. La fonction sommatoire est $m(t) = G(Lt)$ avec $L = (n+1)a$.

Il ressort des résultats que nous venons de rappeler que la fonction sommatoire $G(u) = 1$ si $|u| \leq L$, 0 si $|u| > L$, n'a aucune raison d'être la meilleure, sauf si l'objet est représentable par une fonction indéfiniment dérivable. C'est parce qu'ils se sont placés dans ce cas que certains auteurs ont conclu à la supériorité de ce procédé [4]. Si l'on considère que l'objet peut présenter des discontinuités de première espèce (traits nets), il faut chercher un procédé plus puissant que celui de FOURIER.

Les procédés $m(t) = 1 - |t|^k$ donneront souvent de bons résultats. Ils sont aussi puissants que le procédé de FEJER, mais ilsaturent avec un ordre d'approximation meilleur.

De la définition de f et I il résulte que

$$c_p = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} f(x) e^{-ip\pi \frac{x}{X}} dx$$

$$c_p G\left(\frac{pL}{n+1}\right) = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} I(x) e^{-ip\pi \frac{x}{X}} dx$$

$$c_p \left[1 - G\left(\frac{pL}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} (f - I) e^{-ip\pi \frac{x}{X}} dx$$

Comme

$$|f - I| \leq r_n, \quad \left| c_p \left[1 - G\left(\frac{pL}{n+1}\right)\right] \right| \leq r_n$$

Par conséquent r_n est limité inférieurement par le plus grand des nombres

$$\left| c_p \left[1 - G\left(\frac{pL}{n+1}\right)\right] \right|$$

lorsque p va de $-n$ à $+n$. C'est en cela que consiste la saturation du procédé $G(Lt)$.

Si

$$G(t) = 1 - |t|^k$$

$$r_n \geq \left| c_p \left(\frac{pL}{n+1}\right)^k \right|.$$

L'ordre de grandeur de l'approximation de saturation dépend des propriétés de la fonction f . Si c_p est de

l'ordre de $\frac{C}{p^q}$ deux cas sont possibles :

(i) $k < q$ alors $r_n > \frac{CL^k}{(n+1)^k}$. C'est l'ordre du zéro de $1 - G(Lt)$ pour $t = 0$ qui fixe l'ordre de la saturation.

(ii) $k > q$ alors $r_n > \frac{CL^k}{(n+1)^q}$. L'ordre de grandeur de la saturation est fixé maintenant par la régularité de f .

En définitive, si l'on désire obtenir une bonne approximation d'objets très réguliers, il faut choisir une fonction $G(Lt)$ telle que le zéro de $1 - G$ pour $t = 0$ soit d'ordre élevé. Comme en pratique on ne peut guère s'attendre à ce que l'objet étudié soit représenté par une fonction indéfiniment dérivable, des valeurs de k supérieures à 4, voire même 2, seront le plus souvent inutiles, car ce ne serait pas elles qui fixeraient l'ordre de l'approximation de saturation.

Il résulte donc de ce que nous venons de voir que l'objet f est approché par une image I ; il est en général impossible de donner une borne quelconque de l'écart entre objet et image, car toutes les bornes que nous avons indiquées sont fonction des propriétés de f et non celles de I . Si l'appareil a une transmission des fréquences constante dans le domaine $|u| < L$ il est impossible de dire si l'écart entre f et I tend vers zéro quand L augmente à cause du phénomène de GIBBS. On peut donc craindre des écarts importants, quel que soit L . On peut classer les fonctions de transmission des fréquences spatiales d'après leur puissance.

Si d'un objet présentant certaines irrégularités (points anguleux, discontinuités de première espèce) une fonction G_1 donne une approximation tendant vers l'objet si L tend vers l'infini alors que la fonction G_2 donne une image qui, en certains points, ne tend pas vers l'objet, on dit G_1 plus puissante que G_2 . La puissance caractérise l'aptitude à former des images correctes d'objets plus ou moins réguliers. La fonction G sera d'autant plus puissante que le zéro de $G(Lt)$ pour $t = 1$ est d'ordre plus élevé. D'autre part, sauf pour la fonction $G = \text{constante}$, l'écart entre objet et image ne peut être partout inférieur à une certaine valeur, fonction de la régularité de f et de l'ordre du zéro de $1 - G$ pour $t = 0$. Il y a saturation de l'approximation.

Pour améliorer la puissance de la fonction G en diminuant sa saturation, il y a intérêt à prendre une fonction aussi constante que possible au voisinage de $t = 0$ (basses fréquences) et se raccordant à l'axe le plus doucement possible de la fréquence de coupure.

B. Instrument à pupille continue. — Le cas de l'instrument à pupille continue est plus complexe. Nous nous limitons encore au problème unidimensionnel.

$$I(x) = \int_{-L}^{+L} F(u) G(u) e^{2\pi i ux} du = \int_{-L}^{+L} F(u) m\left(\frac{u}{L}\right) e^{2\pi i ux} du.$$

Là encore, on peut choisir d'une infinité de manières la fonction $m(t)$ nulle si $|t| > 1$ pour que $I(x) \rightarrow f$ si $L \rightarrow \infty$. Mais il n'existe pas de théorie mathématique d'ensemble de l'approximation ainsi réalisée. Nous indiquerons l'usage que l'on peut faire de quelques résultats dus à ZYGMUND [12] et BOCHNER [13].

Supposons l'objet limité à un segment $-X, +X$ (cela ne correspond du reste pas à une restriction car le champ des instruments d'optique, quelque grand qu'il soit, est généralement limité). Si l'objet est sommable par une somme de FOURIER sur le segment $-X, +X$ il est représentable sur ce segment par une intégrale de FOURIER : $m(t) = 1$ si $|t| \leq 1, 0$ si $|t| > 1$. Par conséquent le procédé de sommation correspondant à une transmission constante dans la bande $|u| < L$, nulle en dehors, est soumis aux mêmes restrictions que dans le cas des pupilles à fentes (objets réguliers).

Nous avons montré que si la fonction f a une dérivée d'ordre p bornée, elle peut être approchée à $C_p \frac{B(f^{(p)})}{(2\pi L)^p}$ par des sommes d'exponentielles dont l'argument est limité par $2\pi L$. Comme ce résultat ne dépend pas du nombre de termes de la somme, mais seulement du rang du dernier harmonique transmis, on peut par un passage à la limite, l'étendre au cas des intégrales. Mais il n'est pas possible de dire si cela correspond à la meilleure approximation.

Un théorème dû à BOCHNER [13] nous permettra de relier l'approximation à un critère d'apodisation [15].

Nous adopterons les notations suivantes :

L'objet $f(x)$ est approché par une image $I(x) = S_L^m(x)$

$$(a) \quad S_L^m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) LH(Lt) dt$$

la fonction $H(t)$ ayant une transformée nulle en dehors du segment $-1, +1$. Soit $m(u)$ cette transformée

$$(b) \quad S_L^m(x) = \int_{-L}^{+L} F(u) m\left(\frac{u}{L}\right) e^{2\pi i ux} du.$$

Avec ces notations, la fonction $m\left(\frac{u}{L}\right)$ s'identifie à la transmission $G(u)$ de l'instrument. Elle a la même signification que ci-dessus. Nous supposons $H(x)$ paire

$$(c) \quad H(x) = H(-x).$$

On peut d'autre part introduire la condition de normalisation

$$(d) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) dx = 1$$

et, puisque

$$(e) \quad m(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-2\pi i ux} dx, \text{ on obtient } m(0) = 1.$$

En combinant (c) et (a) il vient

$$S_L^m(x) = \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] LH(Lt) dt.$$

Tenant compte de (d) on aura

$$f(x) = 2f(x) \int_0^{+\infty} LH(Lt) dt = \int_0^{+\infty} 2f(x) LH(Lt) dt,$$

et finalement

$$S_L^m(x) - f(x) = \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] LH(Lt) dt.$$

Si l'on satisfait aux 3 conditions suivantes

1°) $|H(x)| \leq H_0(x)$ quel que soit x , la fonction H_0 étant positive non croissante,

2°) $H_0(x) < \frac{a}{x^{q+2}}$, à partir d'une certaine valeur x_0 de x ,

3°) $\int_0^t |f(x+v) + f(x-v) - 2f(x)| dv \leq bt^r$

pour $|t| \leq y$ avec $y > \frac{x_0}{L}$,

on a

$$(A) \quad |S_L^m - f| \leq \frac{C}{L^{r-1}} \quad \text{si } r < q + 2$$

$$(B) \quad |S_L^m - f| \leq \frac{C' \text{Log } L}{L^{q+1}} \quad \text{si } r = q + 2$$

$$(C) \quad |S_L^m - f| \leq \frac{C''}{L^{q+1}} \quad \text{si } r > q + 2.$$

Dans le premier cas c'est la régularité de f qui fixe l'ordre de grandeur de l'approximation. Dans le troisième cas, c'est la décroissance de H pour x infini qui le fixe. Or cette décroissance est un des facteurs caractéristiques de l'apodisation d'une figure de diffraction. Les pupilles apodisées suivant ce critère sont aptes à la reproduction des fonctions très régulières (variations lentes d'éclairement).

D'autre part la démonstration de ces résultats (voir appendice III) ne faisant intervenir la régularité de f que sur l'intervalle $-y, +y$ autour de x , l'approximation en un point ne dépend que du comportement de f dans un petit intervalle autour de ce point. Il y a *localisation de l'approximation*.

Si l'on prend $q=0, r=2$, il vient $|S_L^m - f| \leq \frac{C' \text{Log } L}{L}$. Cette valeur tend vers 0 si $L \rightarrow \infty$. Or pour le procédé de FEJER

$$m(t) = 1 - |t| \quad H(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2} \quad \text{on a précisément } q=0.$$

Si la fonction f est continue (même si elle a des points anguleux) $r=2$. On retrouve le résultat suivant lequel toute fonction continue peut être approchée à l'approximation que l'on veut par une somme de FEJER d'ordre convenable. Nous pensons qu'il est à peine utile de rappeler qu'un instrument à pupille rectangulaire fournit, en théorie au moins, une telle somme.

La décroissance de $H(x)$ à l'infini est liée à l'ordre du zéro de $m(u)$ pour $u=1$. En effet si

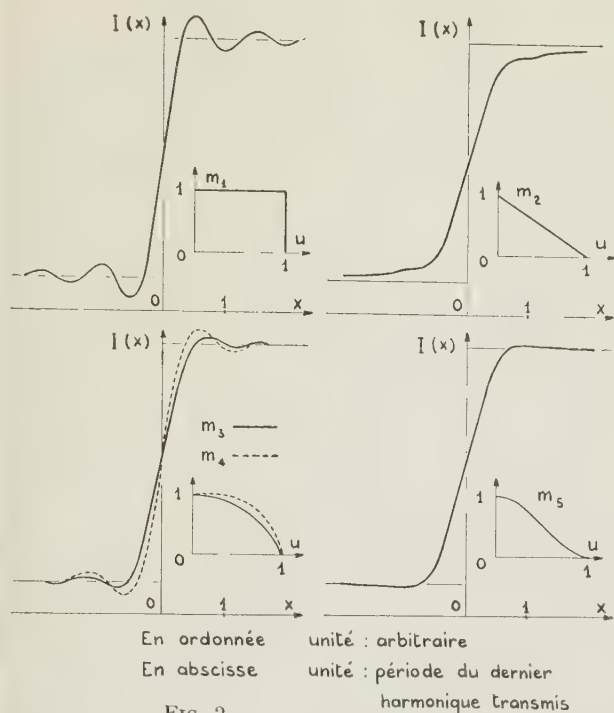


FIG. 2.

$m(1) = m'(1) = \dots = m^{(p)}(1) = 0$ $m^{(p+1)}(1) \neq 0$
en intégrant $p + 1$ fois par parties

$$H(x) = \int_{-1}^{+1} m(u) e^{2\pi i u x} du =$$

$$= \left[\frac{(-1)^{p+1} m^{(p+1)}(u) e^{2\pi i u x}}{(2\pi i x)^{p+2}} \right]_{-1}^{+1} -$$

$$- \frac{(-1)^{p+1}}{(2\pi i x)^{p+2}} \int_{-1}^{+1} m^{(p+2)}(u) e^{2\pi i u x} du.$$

Donc si m a en $u = 1$ un zéro d'ordre $p + 1$, H décroît aussi vite que $\frac{1}{x^{p+2}}$ et l'ordre de grandeur de l'approximation

peut atteindre $\frac{1}{L^{q+1}}$. Dès que p est différent de zéro, une telle fonction approche une fonction continue avec une approximation au moins aussi bonne que $1/L$.

Envisageons alors le problème de la saturation. En procédant comme nous l'avons déjà fait :

$$F(u) \left[1 - m\left(\frac{u}{L}\right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (S_L^m - f) e^{-2\pi i u x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_L^m - f| dx > \left| F(u) \left[1 - m\left(\frac{u}{L}\right) \right] \right|.$$

Nous pouvons supposer l'objet f nul si $|x| > X$. Alors

$$S_L^m = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) LH(Lt) dt = \int_{x-X}^{x+X} f(x+t) LH(Lt) dt$$

Si $|x| > x_0 + X$

$$|S_L^m| \leq \frac{a B(f)}{(q+1) L^{q+1} (x-X)^{q+1}} \text{ à cause de (i) et (ii).}$$

Comme pour $|x| > X$, $f = 0$, il vient en posant

$$|S_L^m - f| < r_L \text{ pour } |x| \leq x_0 + X$$

$$\left| F(u) \left[1 - m\left(\frac{u}{L}\right) \right] \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |S_L^m - f| dx \leq 2(x_0 + X)r_L$$

$$\frac{2aB(f)}{q(q+1)L^{q+1}x_0^{q+1}}.$$

Si l'on augmente q , il est nécessaire que r_L augmente, dans la mesure où la croissance de q n'entraîne pas une décroissance de $1 - m\left(\frac{u}{L}\right)$ aussi rapide que $\frac{1}{L^{q+1}}$.

Si l'on suppose donnée la valeur de q , il y aura intérêt à maintenir $m(u)$ aussi voisin que possible de 1 pour des valeurs de u aussi grandes que possible. Il y a intérêt à augmenter l'ordre du zéro de $1 - m(u)$

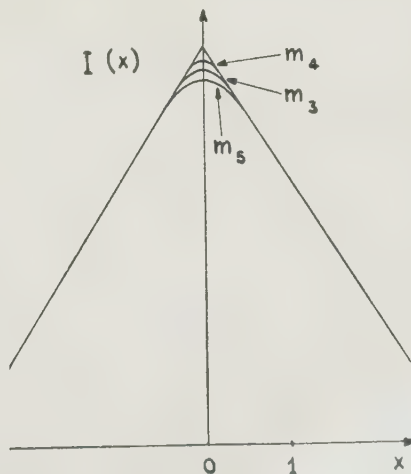
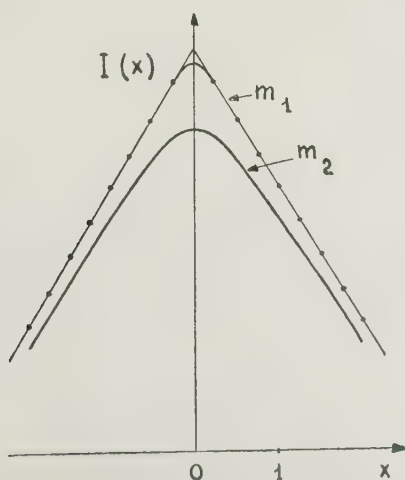


FIG. 3.

pour $u = 0$. En pratique, les fonctions à approcher sont telles que l'on pourra se contenter de $q = 2$, voire même $q = 1$.

Les conclusions auxquelles nous aboutissons sont en tout point semblables à celles que nous avons obtenues pour l'appareil à pupille à fentes. Pour illustrer ces résultats nous avons étudié le comportement de l'image au voisinage d'une discontinuité de première espèce (fig. 2) et d'un point anguleux (fig. 3). Nous avons étudié les fonctions

$$\begin{aligned} m_1(t) &= 1 \text{ si } |t| \leq 1, \text{ et } 0 \text{ si } |t| > 1 \quad (\text{Procédé de FOURIER}) \\ m_2(t) &= 1 - |t| \quad (\text{Procédé de FEJER}) \\ m_3(t) &= 1 - t^2 \\ m_4(t) &= 1 - t^4 \\ m_5(t) &= (1 - t^2)^2. \end{aligned}$$

Au point de vue puissance, m_5 est le plus puissant, puis m_4 , m_3 , m_2 sont de puissance équivalente ; m_1 est le moins puissant.

Si l'objet présente des discontinuités de première espèce, tous ces procédés sauf m_1 ,aturent avec le même ordre $1/L$.

Si l'objet présente seulement des points anguleux, m_1 ne sature toujours pas ; m_2 sature encore avec l'ordre $1/L$; les autresaturent avec l'ordre $1/L^2$.

On constate que c'est le procédé le plus puissant qui reproduit le mieux l'objet, à une distance suffisante de la discontinuité (environ une période du dernier harmonique transmis). Les procédés FOURIER et de FEJER sont nettement les moins favorables. Les procédés m_3 et m_4 donnent des résultats très comparables.

Au voisinage d'un point anguleux, la saturation rapide du procédé de FEJER rend celui-ci très défectueux. Les autres procédés sont comparables.

Indiquons une méthode propre à améliorer une fonction $m(u)$ donnée en la transformant en une autre fonction ayant en $u = 1$ un zéro du même ordre, et telle qu'en $u = 0$ $1 - m(u)$ ait un zéro d'ordre double.

S_L^m est l'image de f à travers un instrument d'optique. Formons l'image de S_L^m à travers le même instrument. Soit S' cette image

$$T(S_L^m) = T(f) m\left(\frac{u}{L}\right)$$

$$T(S') = T(S_L^m) m\left(\frac{u}{L}\right) = T(f) m^2\left(\frac{u}{L}\right).$$

Réalisons la combinaison $2S_L^m - S'$

$$T(2S_L^m - S') = m\left(\frac{u}{L}\right) \left[2 - m\left(\frac{u}{L}\right) \right] T(f).$$

Si $1 - m(u)$ a en $u = 0$ un zéro d'ordre p

$$m(u) = 1 - au^p + k(u) \quad k(u) \leq bu^{p+1}$$

$$m_1(u) = m(u) [2 - m(u)] = [1 - au^p + k(u)]$$

$[1 + au^p - k(u)] = 1 - a^2u^{2p} + k_1(u)$; $k_1(u) \leq b^2u^{2p+1}$.
Donc le zéro de $1 - m_1(u)$ en $u = 0$ est bien d'ordre double. D'autre part le zéro de $m_1(u)$ en $u = 1$ est du

même ordre que celui de m . On a remplacé l'image par une nouvelle image due à une fonction sommatoire aussi puissante et donnant un ordre de saturation d'approximation meilleur. Signalons que cette méthode a été proposée sous une forme légèrement différente par Van CITTERT [14]. Cette technique peut du reste être itérée.

Nous n'avons pas tenu compte de la restriction $g(x) > 0$. Nous ne pensons pas en fait qu'il en résulte de limitation importante à la théorie précédente. Il suffit de superposer un fond continu à la fonction $g(x)$ pour qu'elle devienne constamment positive.

Nous avons signalé qu'il était impossible de donner une borne de l'approximation. L'application du théorème de BERNSTEIN apporte pourtant quelques indications. Si en effet la dérivée de I atteint une valeur correspondant à la limite donnée par ce théorème, on ne peut rien dire sur la fonction f . Mais si la valeur de la dérivée de I est très inférieure à cette borne il est « probable » que la dérivée de f est du même ordre de grandeur, et l'approximation assez bonne. Une étude complète de ceci semble très difficile ; il faudrait pouvoir définir une probabilité liée aux formes les plus fréquentes des fonctions f et tenant compte de ce que l'on peut connaître a priori de ces fonctions (par exemple, elles sont positives).

CONCLUSION

Les théories mathématiques de l'approximation nous ont permis de mettre en évidence deux qualités des instruments d'optique : leur aptitude à former des images correctes d'objets plus ou moins réguliers (puissance du procédé de sommation) ; et l'approximation qu'ils donnent de ces objets (en relation avec la saturation du procédé de sommation). En fonction de ces critères, il semble qu'il y ait intérêt à rendre la fonction de transmission des fréquences d'espace aussi plate que possible pour les fréquences les plus basses, et se raccordant à l'axe le plus doucement possible au voisinage de la fréquence de coupure.

L'application du théorème de Bernstein nous a fourni une borne des variations d'éclairement dans l'image en fonction de la fréquence de coupure.

APPENDICE I

Hypothèses :

(a) $F(u) = 0$ si $|u| > L$

(b) $F(u)$ est bornée en module par $B(F)$

(c) $F(u)$ est régulière par morceaux, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'un nombre limité de points de discontinuité de première espèce entre lesquels elle est continue.

Alors

$$f(x) = \int_{-L}^{+L} F(u) e^{2\pi i u x} du$$

peut être approchée à l'approximation que l'on veut par une somme d'exponentielles

$$S(x) = \sum_{i,j} \omega_{i,j} e^{2\pi i u_{i,j} x}$$

En effet l'intervalle $-L, +L$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles adjacents $-L, U_1; U_1, U_2; \dots; U_n, L$ dans lesquels F est continue. Décomposons l'intervalle U_i, U_{i+1} de longueur s_i en parties

d'égale longueur $\frac{s_i}{n_i}$ et formons la fonction

$$G(u) = F\left(U_i + \frac{2p_j + 1}{2n_i} s_i\right) \text{ sur } U_i + \frac{p_j}{n_i} s_i, \\ U_i + \frac{p_j + 1}{n_i} s_i; p_j = 0, 1, \dots, n_i - 1$$

Soit $S(x)$ la somme

$$S(x) = \sum_{i,j} \frac{s_i}{n_i} F\left(U_i + \frac{2p_j + 1}{2n_i} s_i\right) \times \\ \exp\left[-2\pi i x \left(U_i + \frac{2p_j + 1}{2n_i} s_i\right)\right].$$

Si l'on calcule la transformée de FOURIER de $G(u)$, on trouve

$$T(G) = S(x) \frac{\sin \pi x (s_i/n_i)}{\pi x (s_i/n_i)}.$$

D'après (b) $|F| < B(F)$ $|S| < \sum (s_i/n_i) B(F) = 2LB(F)$.

Si x appartient à un intervalle fini $|x| \leq X$ on peut choisir les n_i assez grands pour que, m désignant le plus grand des intervalles s_i/n_i ,

$$\left| \frac{\sin \pi x (s_i/n_i)}{\pi x (s_i/n_i)} - 1 \right| \leq \frac{1}{6} \pi^2 x^2 (s_i/n_i)^2 \leq \frac{(\pi \times m)^2}{6}$$

soit inférieur à tout nombre donné. D'autre part F étant continue sur chaque intervalle U_i, U_{i+1} , la différence $F - G$ peut être rendue aussi petite que l'on veut. En effet, F et G sont confondus au centre de

chaque intervalle $U_i + \frac{p_j}{n_i} s_i, U_i + \frac{p_j + 1}{n_i} s_i$ et la

variation de F sur un intervalle de longueur m tend vers zéro avec m puisque F est continue. Donc $|T(F - G)| \leq 2LB(F - G)$.

Finalement

$$f(x) = T(G) + T(F - G) = S + [T(G) - S] + T(F - G)$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \left(\frac{1}{6}\right) (\pi X m)^2 + 2LB(F - G).$$

L'extension du théorème de BERNSTEIN en découle.

Quel que soit le nombre de termes de la somme S , celle-ci est indéfiniment dérivable. D'autre part si $S(x)$ est borné en module par $B(S)$, le théorème de BERNSTEIN donne

$$|S^{(p)}(x)| \leq (2\pi L)^p B(S).$$

Choisissons S pour que l'on ait $|f - S| < r$ r étant aussi petit que l'on veut.

Nous aurons alors $B(f) \leq B(S) + r$

D'autre part $T(f^{(p)}) = (2\pi i)^p F(u)$

$T(S^{(p)}) = (2\pi i)^p T(S)$ s'obtient à partir de $(2\pi i)^p F(u)$ de la même manière que G à partir de F . Comme $(2\pi i)^p F(u)$ suit lui aussi les hypothèses du lemme précédent,

$$|S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| \leq r' \\ |f^{(p)}(x)| < |S^{(p)}(x)| + r' \leq (2\pi L)^p B(S) + \\ + r' \leq (2\pi L)^p B(f) + (2\pi L)^p r + r'.$$

On peut choisir r et r' assez petits pour rendre les deux derniers termes aussi petits que l'on veut et par conséquent $|f^{(p)}(x)| \leq (2\pi L)^p B(f)$.

APPENDICE II

Soit une fonction $f(x, y)$ dont la transformée de FOURIER est nulle en dehors d'un domaine fini D .

$$f(x, y) = \iint_D F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} du dv.$$

On peut inscrire D dans un rectangle E $|u| \leq L$ $|v| \leq L'$.

Remplaçons $F(u, v)$ par la fonction $\underline{F}(u, v)$ égale à F dans D et nulle dans la partie de E extérieure à D . Il vient alors :

$$f(x, y) = \int_{-L}^{+L} \int_{-L'}^{+L'} \underline{F}(u, v) e^{2\pi i vy} dv e^{2\pi i ux} du.$$

Posons $F_1(u, y) = \int_{-L'}^{+L'} \underline{F}(u, v) e^{2\pi i vy} dv$; y étant donné,

$f(x, y)$ considérée comme fonction de la seule variable x a une transformée de FOURIER nulle si $|u| > L$

$$f(x, y) = \int_{-L}^{+L} F_1(u, y) e^{2\pi i ux} du.$$

Donc $B_y(f)$ désignant le maximum de $|f|$ lorsque x va de $-\infty$ à $+\infty$

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right| \leq (2\pi L)^p B_y(f)$$

Soit $B(f)$ le maximum absolu de $|f|$ pour tout x et tout y ; $B_y(f) < B(f)$.

$$\text{Par conséquent } \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right| \leq (2\pi L)^p B(f)$$

$$\text{De la même manière } \left| \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right| \leq (2\pi L')^r B(f)$$

$$\text{Enfin } \frac{\partial^p f}{\partial x^p} = (2\pi i)^p \iint_D u^p F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} du dv$$

a aussi une transformée nulle en dehors du domaine D . Donc

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial y^r} \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right| \leq (2\pi L')^r B \left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right) \leq (2\pi L')^r (2\pi L)^p B(f).$$

Remarquons maintenant que l'on peut faire un changement d'axes

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi ; \quad y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi$$

$$f(X, Y) =$$

$$\iint_D F(u, v) e^{2\pi i [(u \cos \varphi + v \sin \varphi)X + (-u \sin \varphi + v \cos \varphi)Y]} du dv.$$

ou en posant $\begin{cases} U = u \cos \varphi + v \sin \varphi \\ V = -u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{cases}$

$$f(X, Y) = \iint_D F(U, V) e^{2\pi i (UX + VY)} dU dV.$$

Inscrivons D' dans un cercle de rayon R . Il vient alors

$$\left| \frac{\partial^{p+r} f}{\partial x^p \partial y^r} \right| \leq (2\pi R)^{p+r} B(f)$$

quelle que soit l'orientation des axes.

APPENDICE III

Nous utilisons les conditions énoncées plus haut. Nous poserons en plus

$$g(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$S_L^m - f = \int_0^{+\infty} g(x, t) LH(Lt) dt$$

$$S_L^m - f = \int_0^{+\infty} g(x, t) LH(Lt) dt$$

$$\left| S_L^m - f \right| \leq \int_0^{+\infty} L \left| g(x, t) \right| \left| H(Lt) \right| dt \leq \int_0^{+\infty} L \left| g(x, t) \right| H_0(Lt) dt.$$

On décompose l'intervalle d'intégration en deux intervalles $I_1 = \int_0^y$, $I_2 = \int_y^{+\infty}$. Si $|Ly| > x_0$ on peut

dans la deuxième intégrale majorer H_0 par $\frac{a}{x^{q+2}}$. Elle se décompose alors en trois

$$\int_y^{+\infty} |f(x+t)| \frac{aL}{(Lt)^{q+2}} dt < \frac{aL}{(Ly)^{q+2}} \int_y^{+\infty} |f(x+t)| dt.$$

De même pour l'intégrale avec $f(x-t)$.

Enfin

$$\int_y^{+\infty} 2|f(x)| \frac{aL}{(Lt)^{q+2}} dt \leq \frac{2a|f(x)|}{(q+1)(Ly)^{q+1}}.$$

En posant

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad I_2 \leq \frac{aL}{(Ly)^{q+2}} \left[\|f\| + \frac{2y|f|}{q+1} \right].$$

Dans l'intégrale I_1 , compte tenu de la non croissance de H_0 , on majore I_1 si l'on majore

$$G(x, t) = \int_0^t |g(x, t)| dt$$

par bt^r . Alors, tous calculs faits,

$$I_1 \leq \frac{br}{L^{r-1}} \int_0^{Ly} v^{r-1} H_0(v) dv$$

On décompose cette intégrale en deux :

$$\int_0^{x_0} H_0(v) v^{r-1} dv \leq H_0(0) \int_0^{x_0} v^{r-1} dv = H_0(0) \frac{x_0^r}{r}$$

$$J = \int_{x_0}^{Ly} v^{r-1} H_0(v) dv \leq \int_{x_0}^{Ly} v^{r-1} \frac{a}{v^{q+2}} dv$$

3 cas à distinguer. (A) $r < q+2$ $J \leq \frac{a}{(q+2-r)x_0^{q+2-r}}$

$$\left| S_L^m - f \right| < \frac{aL}{(Ly)^{q+3}} \left[\|f\| + \frac{2y|f|}{q+1} \right] + \frac{br}{L^{r-1}}$$

$$\left[\frac{x_0^r H_0(0)}{r} + \frac{a}{(q+2-r)x_0^{q+2-r}} \right]$$

Par un choix convenable de y , le premier terme peut être rendu inférieur au second. Alors $|S_L^m - f|$ est de l'ordre de $L^{-(r-1)}$. Il suffit de prendre y de l'ordre de $L^{\left(\frac{1-r}{q+2}\right)}$

(B) $r = q+2$ $J < a \text{ Log } \frac{Ly}{x_0}$

$$\left| S_L^m - f \right| \leq \frac{aL}{(Ly)^{q+2}} \left[\|f\| + \frac{2y|f|}{q+1} \right] + \frac{b(q+2)}{L^{q+1}}$$

$$\left[\frac{x_0^{q+2} H_0(0)}{q^{q+2}} + a \text{ Log } \left(\frac{Ly}{x_0} \right) \right].$$

L'approximation est de l'ordre de $\frac{\text{Log } L}{L^{q+1}}$

(C) $r > q+2$ $J < \frac{a(Ly)^{r-q-2}}{r-q-2}$

$$\left| S_L^m - f \right| \leq \frac{aL}{(Ly)^{q+2}} \left[\|f\| + \frac{2y|f|}{q+1} \right] + \frac{x_0^r b(q+2) H_0(0)}{r L^{r-1}} + \frac{abry^{r-q-2}}{(r-q-2) L^{q+1}}.$$

L'approximation est de l'ordre de $\frac{1}{L^{q+1}}$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. M. DUFFIEUX, *L'intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, Rennes, 1946.
- [2] P. B. FELGETT, E. H. LINFOOT, *Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Ser. A*, vol. 247 A (1955), 931.

- [3] P. ELIAS, D. S. GREY, D. Z. ROBINSON, *J. Opt. Soc. Am.* **42** (1952), 127.
- [4] A. BLANC-LAPIERRE, Théorie de la transmission de l'information. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 13 (1952-53).
- [5] A. MARÉCHAL, *Rev. Opt.*, **32** (1953).
- [6] L. BERGER, *J. Phys.*, **16**, 1955.
- [7] S. BERNSTEIN, *Propriétés extrémales des fonctions analytiques d'une variable réelle*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- [8] C. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Approximation des fonctions d'une variable réelle*. Paris, Gauthier-Villars, 1952.
- [9] D. JACKSON, The theory of approximation. Ann. Math. Soc. New York, 1930.
- [10] M. ZAMANSKY, Thèse, Paris, 1949.
- [11] J. FAVARD, *Bull. Sc. Math.*, 2°, **61**, 1937.
- [12] A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, Warszawa Lwow, 1935.
- [13] BOCHNER, *Fourier transforms*, Princeton University Press, 1949.
- [14] VAN CITTERT, *Z. Phys.*, **69** (1931), 298.
- [15] B. DOSSIER, Thèse de Doctorat, Paris, Edition de la Rev. d'Optique, 1954.
- [16] J. ARSAC, *Application des théories de l'approximation à l'observation par antennes en radioastronomie*. A paraître.
- [17] N. WIENER, *The extrapolation, Interpolation, and Smoothing of stationary Time series*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1949.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1956.

The defocused image of sinusoidal gratings

W. H. STEEL

Division of Physics, National Standards Laboratory,
Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization,
Sydney.

SUMMARY. — *The defocused image of an infinite sinusoidal grating is calculated by scalar diffraction theory for a perfect optical system. It is shown that the image contrast for both circular and annular pupils and for either incoherent or partially coherent illumination can be found in terms of Incomplete BESSEL and STRUVE functions. The results of some typical cases are given. The effect of limiting a grating to a finite number of periods is considered. The results are applied to a consideration of resolving power tests.*

RÉSUMÉ. — *L'image défocalisée d'une mire sinusoidale indéfiniment étendue est calculée dans le cadre de la diffraction (avec amplitudes scalaires) pour un instrument stigmatique. On montre que le contraste de l'image pour les pupilles circulaires ou annulaires en éclairage incohérent ou partiellement cohérent peut être exprimé à l'aide des fonctions de Bessel et de Struve « incomplètes ». On donne les résultats dans quelques cas types. L'effet de la limitation de la mire à un nombre fini de traits est étudié. Des considérations sur les tests de pouvoir séparateur en résultent.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Für ein ideales optisches System wird das unscharf eingestellte Bild eines unendlich breiten Sinusgitters aufgrund der skalaren Beugungstheorie berechnet. Es ergibt sich, dass der Bildkontrast für kreisförmige und ringförmige Pupillen und für inkohärente oder teilweise kohärente Beleuchtung mit Hilfe unvollständiger Bessel und Struvefunktionen dargestellt werden können. Für einige typische Fälle werden die Ergebnisse mitgeteilt. Der Einfluss einer Beschränkung auf eine endliche Zahl von Gitterperioden wird geprüft. Die Ergebnisse lassen sich auf die Untersuchung von Auflösungstesten anwenden.*

I. Introduction. — The light distribution in images formed by optical systems possessing aberrations has been calculated for many particular cases, either on the basis of geometrical optics or by scalar diffraction theory [1]. The former method has been used extensively for camera lenses and it gives a satisfactory result when large aberrations are present. For aberrations less than $\lambda/4$ an approximate application of diffraction theory gives sufficiently accurate results for the illuminations at the central point of the image; this method was used by MARÉCHAL [2] for point images to study tolerances and it can also be applied to images of extended objects. But neither method is suitable for intermediate amounts of aberration and an exact evaluation of the diffraction integral is then required.

A considerable amount of work, both theoretical and experimental, has been done on the diffraction image of a point; a summary is given by WOLF [3]. The point image however shows complexities that are not present in the images of extended objects and so, as WEINSTEIN [4] has indicated, there are advan-

tages in investigating the images of typical extended objects. He has studied the defocused image of an incoherently illuminated edge, while the result given by WOLF [5] can be used to obtain the illumination at the centre of defocused images of circular disks. M^{lle} RÉGNIER [6] has calculated some images of sinusoidal gratings for square and circular apertures in the presence of third order spherical aberration.

The use of the image of an edge or its derivative, the image of a line, to study the performance of an optical system is analogous to the use of step or impulse functions in electrical theory. An alternative procedure electrically is to use sinusoidal voltages of different frequencies and SELWYN [7] and SCHADE [8] have proposed the use in optics of sinusoidal test objects of various spacial frequencies. With incoherent illumination, each spacial frequency in a complex object appears in the image with its contrast reduced by a *contrast transmission factor* [9] independently of other frequencies present. The two methods are related: the contrast transmission factor is the FOURIER cosine transform of the illumination distribution for a

line image. The images of practical objects are found by integration with respect to either distance or frequency. These integrals usually require numerical evaluation and then integrals with respect to frequency have the advantage that they terminate at a finite value, the limit of resolution.

In this paper, the contrast transmission function for defocused images is calculated first for incoherent illumination. For a circular pupil, the result depends on an incomplete form of Poisson's integral, the complete form of which defines the BESSEL and STRUVE functions J_1 and H_1 , and this same integral provides the solution for an annular pupil or for partially coherent illumination. STEEL and WARD [10] have given a table of these incomplete functions. Using these results, several examples are calculated for various pupil shapes and for different degrees of coherence. A simple approximation is found for the contrast transmission function for circular pupils and incoherent illumination.

Although a complete study of an optical system requires measurement of the contrast transmission function at all frequencies, a simple test that is used widely is that of finding the resolving power, the frequency at which the contrast is first detectable visually. These results for a defocused image are used to discuss the relationship of such resolving power tests to the aberrations of the optical system.

NOTATION. — In general we shall use the same notation as in a previous paper [11]. (ξ, η, ζ) and (ξ', η', ζ') are reduced cartesian coordinates centred on the object O and on its geometrical image O'. O ξ lies along the principal ray and O ξ' , O η' , O ζ' are the images of O ξ , O η , O ζ . These reduced coordinates are related to linear coordinates (x, y, z) and (x', y', z') by the relations

$$\xi = (\pi x / \lambda) \sin^2 U, \quad \eta = (2 \pi y / \lambda) \sin U, \quad \zeta = (2 \pi z / \lambda) \sin U,$$

and by similar expressions for ξ' , η' and ζ' , where the angular semi-aperture of the pupil measured from O is U and from O' is U' . A point at the pupil is specified by the coordinates (β, γ) where these are reduced so that $\beta^2 + \gamma^2 = 1$ at the edge of a circular pupil.

The contrast C or C' at any point in the object or image shall be defined as the difference between the illumination at that point and the average illumination across the plane, divided by this average illumination.

II. Defocused image in incoherent light. — (a) GENERAL THEORY. — If the luminance of a self luminous or an incoherently illuminated periodic grating is represented by

$$B(\eta) = \sum_{\omega=0}^{\infty} a(\omega) \cos 2 \omega \eta + \sum_{\omega=1}^{\infty} b(\omega) \sin 2 \omega \eta,$$

then [12] the illumination across the image plane in the presence of an aberration Δ is given, to a constant factor, by

$$(1) \quad E'(\eta') = a(0) + \sum_{\omega=1}^{\infty} T(\Delta, \omega) \left\{ a(\omega) \cos 2 \omega \eta' + b(\omega) \sin 2 \omega \eta' \right\},$$

where $T(\Delta, \omega)$ is a function of Δ and ω only; it is the contrast transmission factor for a spacial frequency 2ω in the presence of an aberration Δ . Obviously it is equal to the central contrast of the image of

$$(2) \quad B(\eta) = 1 + \cos 2 \omega \eta,$$

a sinusoidal object of unit contrast and spacial frequency 2ω .

The amplitude at (η', ζ') due to a point source at (η, ζ) is given, to a constant factor, by scalar diffraction theory as:

$$(3) \quad f'(\eta' - \eta, \zeta' - \zeta) = \frac{1}{2 \pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\beta, \gamma) e^{i\beta(\eta' - \eta) + i\gamma(\zeta' - \zeta)} d\beta d\gamma$$

where $g(\beta, \gamma)$ is the pupil function, zero outside the pupil and $e^{i\psi}$ inside, $\psi(\beta, \gamma)$ being the phase variation over the pupil due to aberrations or a defocusing. It is assumed that the amplitude is constant over the wave front within the boundary of the pupil and zero outside it. At the centre of the image $\eta' = \zeta' = 0$ and (3) can be written $f'(\eta, \zeta) = T[g(\beta, \gamma)]$, the FOURIER transform of $g(\beta, \gamma)$.

If the luminance (2) is written as $1 + \text{Re}(e^{2i\omega\eta})$ the contrast at O' due to this object is

$$C' = \frac{1}{\pi} \text{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} |f(\eta, \zeta)|^2 e^{2i\omega\eta} d\eta d\zeta,$$

and this, by an application of the convolution theorem, gives

$$(4) \quad C' = \frac{1}{\pi} \text{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\beta', \gamma) g^*(\beta - 2\omega, \gamma) d\beta d\gamma$$

where g^* is the complex conjugate of g .

If A_0 denotes the domain of (β, γ) covered by the pupil, and $A_{2\omega}$ a similar area displaced a distance 2ω along the axis of β , the integral (4) is to be taken over the domain common to these two areas, which is denoted by $A_0 \times A_{2\omega}$. If there is no aberration present other than a defocusing $\delta x = 2 D \lambda / \sin^2 U'$ where $D \lambda$ is the optical path difference between the marginal and paraxial rays, then

$$\psi = 2 \pi D (\beta^2 + \gamma^2) = \xi'(\beta^2 + \gamma^2).$$

For a circular pupil, the domain $A_0 \times A_{2\omega}$ consists of two segments of a circle and, when ω is positive,

$$(5) \quad C' = T(\xi', \omega) = \frac{4}{\pi} \text{Re} \left\{ e^{-4i\omega^2\xi'} \int_{\omega}^1 \sqrt{1 - \beta^2} e^{4i\omega\xi'\beta} d\beta \right\}.$$

b) $T(\xi', \omega)$ IN TERMS OF INCOMPLETE BESSEL AND STRUVE FUNCTIONS. — The integral

$$(6) \quad P_1(x, \omega) = \frac{4}{\pi} \int_{\omega}^1 \sqrt{(1-t^2)} e^{ixt} dt$$

is an incomplete integral corresponding to the extension of POISSON'S integral

$$J_1(x) + i H_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)} e^{ixt} dt.$$

We shall define incomplete BESSEL and STRUVE functions of unit order as

$$(7) \quad \tilde{J}_1(x, \omega) = \frac{2x}{\pi} \int_{\omega}^1 \sqrt{(1-t^2)} \cos xt dt$$

$$\mathcal{H}_1(x, \omega) = \frac{2x}{\pi} \int_{\omega}^1 \sqrt{(1-t^2)} \sin xt dt$$

where $-1 \leq \omega \leq 1$.

Then

$$P_1(x, \omega) = \frac{2}{x} \left\{ \tilde{J}_1(x, \omega) + i \mathcal{H}_1(x, \omega) \right\}$$

and

$$\begin{aligned} P_1(x, 0) &= \frac{2}{x} \left\{ J_1(x) + i H_1(x) \right\} \\ &= \Lambda_1(x) + \frac{2i}{x} H_1(x) \end{aligned}$$

$$P_1(0, \omega) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \omega - \omega \sqrt{(1-\omega^2)} \right\} = T(0, \omega).$$

STEEL and WARD [10] have studied the properties of the general integral

$$(8) \quad P_{\nu}(x, \omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu!}{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!} \int_{\omega}^1 (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{ixt} dt.$$

Methods of calculation are indicated and tables are given for orders $\nu = 0$ and 1. From these tables, transmission factors for a defocused image can be calculated, for

$$\begin{aligned} T(\xi', \omega) &= \operatorname{Re} \left\{ P_1(4\omega\xi', \omega) e^{-4i\omega^2\xi'} \right\} \quad (0 \leq \omega \leq 1) \\ (9) \quad &= 0 \quad (\omega > 1). \end{aligned}$$

For negative values of ω the limits of integration in equation (5) are $-\omega$ to 1 and $T(\xi', -\omega) = T(\xi', \omega)$. Due to this change of limits of integration, equation (9)

no longer applies; $P_1(-4\omega\xi', -\omega)$ is not equal to $P_1(4\omega\xi', \omega)$ but to

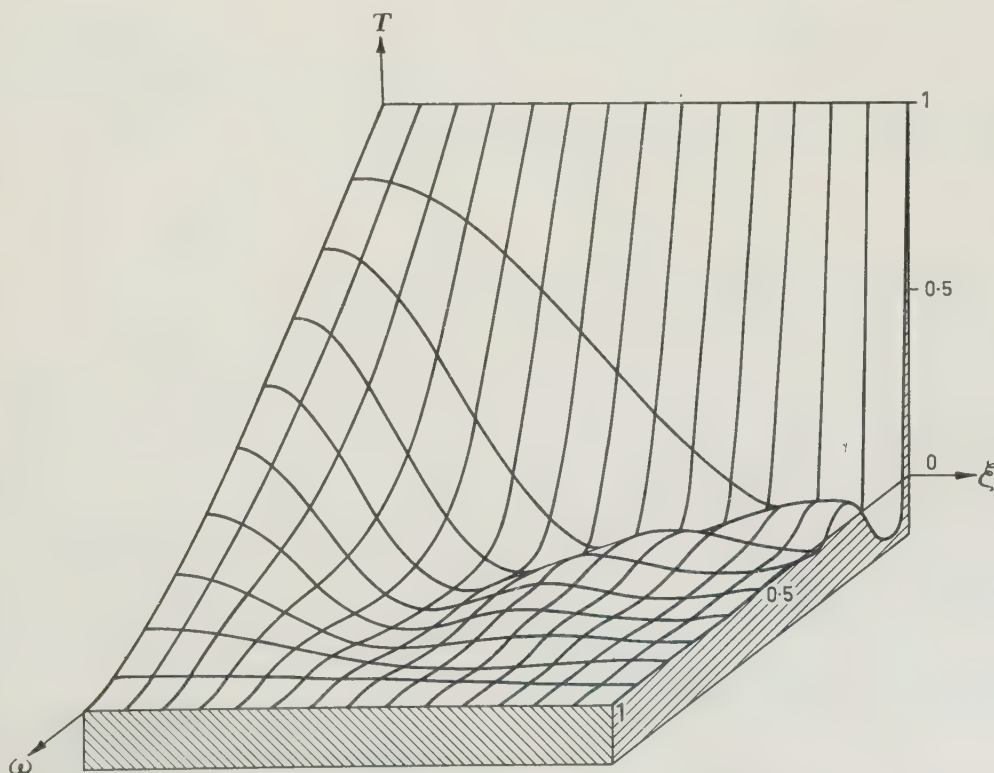


FIG. 1. — Representation of the Contrast Transmission Function $T(\xi', \omega)$ with intervals $\xi' = 0(1)14$, $\omega = 0(0.1)1$.

$$(10) \quad 2 \Lambda_1(4 \omega \xi') - \mathbf{P}_1(4 \omega \xi', \omega),$$

where $\Lambda_1(x) = 2 \mathbf{J}_1(x)/x$. Values of \mathbf{P}_1 for negative ω will be required for the investigation of annular pupils and partially coherent illumination.

The contrast transmission function for incoherent illumination and a circular pupil is given in Table 1 for defocusing up to $2.2 \lambda (\xi' = 14)$. The form of the function is shown in figure 1, and some special cases are given in later figures.

TABLE I
Contrast Transmission Factors $T(\xi', \omega)$ for a defocusing ξ' and a spacial frequency 2ω

ξ'	ω									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9 1
0	1	0.8729	0.7471	0.6238	0.5046	0.3910	0.2848	0.1881	0.1041	0.0374 0
1	1	0.8590	0.7103	0.5721	0.4510	0.3464	0.2550	0.1731	0.0992	0.0368 0
2	1	0.8182	0.6073	0.4343	0.3131	0.2334	0.1784	0.1328	0.0856	0.0352 0
3	1	0.7531	0.4581	0.2549	0.1476	0.1016	0.0864	0.0803	0.0658	0.0326 0
4	1	0.6677	0.2906	+ 0.0876	+ 0.0155	+ 0.0024	+ 0.0124	+ 0.0310	0.0435	0.0292 0
5	1	0.5675	0.1340	— 0.0255	— 0.0480	— 0.0382	— 0.0238	— 0.0029	0.0224	0.0252 0
6	1	0.4583	+ 0.0118	— 0.0688	— 0.0455	— 0.0282	— 0.0236	— 0.0167	+ 0.0057	0.0208 0
7	1	0.3466	— 0.0626	— 0.0544	— 0.0089	+ 0.0024	— 0.0041	— 0.0138	— 0.0049	0.0162 0
8	1	0.2385	— 0.0880	— 0.0122	+ 0.0242	+ 0.0232	+ 0.0137	— 0.0025	— 0.0090	0.0118 0
9	1	0.1395	— 0.0741	+ 0.0259	+ 0.0318	+ 0.0216	+ 0.0179	+ 0.0081	— 0.0079	0.0078 0
10	1	+ 0.0541	— 0.0373	+ 0.0403	+ 0.0160	+ 0.0052	+ 0.0092	+ 0.0121	— 0.0038	0.0042 0
11	1	— 0.0143	+ 0.0041	+ 0.0292	— 0.0061	— 0.0097	— 0.0028	+ 0.0089	+ 0.0012	+ 0.0013 0
12	1	— 0.0642	+ 0.0353	+ 0.0049	— 0.0169	— 0.0119	— 0.0089	+ 0.0021	+ 0.0050	— 0.0008 0
13	1	— 0.0951	+ 0.0481	— 0.0157	— 0.0114	— 0.0029	— 0.0060	— 0.0039	+ 0.0066	— 0.0023 0
14	1	— 0.1082	+ 0.0420	— 0.0218	+ 0.0027	+ 0.0076	+ 0.0017	— 0.0057	+ 0.0059	— 0.0030 0

(c) APPROXIMATE THEORIES. — (1) *Small aberrations*. The author [11] has given a diffraction treatment of the image of sinusoidal objects, suitable for small aberrations. It was shown that

$$(11) \quad T(\xi', \omega) \simeq \mathbf{P}_1(0, \omega) - 2\omega^2 \xi'^2 \left\{ (1 + 4\omega^2) \mathbf{P}_3(0, \omega) - \frac{64}{15\pi} \omega(1 - \omega^2)^{\frac{7}{2}} \right\},$$

where

$$\mathbf{P}_3(0, \omega) = \mathbf{P}_1(0, \omega) - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{3} \omega(1 - \omega^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15} \omega(1 - \omega^2)^{\frac{5}{2}} \right\}.$$

This approximation is compared with the transmission factor for $\omega = 5$ in figure 2. It is seen that the approximation is good for a defocusing less than $\lambda/4$, but it does not show any of the oscillations at higher defocusing.

(2) *Geometrical optics*. The out-of-focus image due to a point source is, by geometrical optics, a uniform disk of radius $2 \xi'$ and illumination proportional to

$U^2/4 \xi'^2$. On this basis, the central contrast due to a sinusoidal object is

$$(12) \quad C' = \Lambda_1(4 \omega \xi')$$

as LINDBERG [9] has indicated.

This value is compared in figure 2 with the trans-

mission factor. Even for a large defocusing, it is not a good approximation except for very small ω , for, although it has the same magnitude as $T(\xi', \omega)$, it is displaced along the axis of ξ' by an amount depending on ω^2 . For large ξ' ,

$$T(\xi', \omega) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} (2 \omega \xi')^{-\frac{3}{2}} \cos(4 \omega \xi' - 4 \omega^2 \xi' - 3 \pi/4)$$

and

$$\Lambda_1(4 \omega \xi') \sim \pi^{-\frac{1}{2}} (2 \xi' \xi')^{-\frac{3}{2}} \cos(4 \omega \xi' - 3 \pi/4).$$

(3) *Empirical approximation*. An investigation [10] of the properties of the incomplete function suggests the approximation

$$(13) \quad T(\xi', \omega) \simeq \mathbf{P}_1(0, \omega) \Lambda_1 \left\{ 4 \omega (1 - \omega) \xi' \right\}.$$

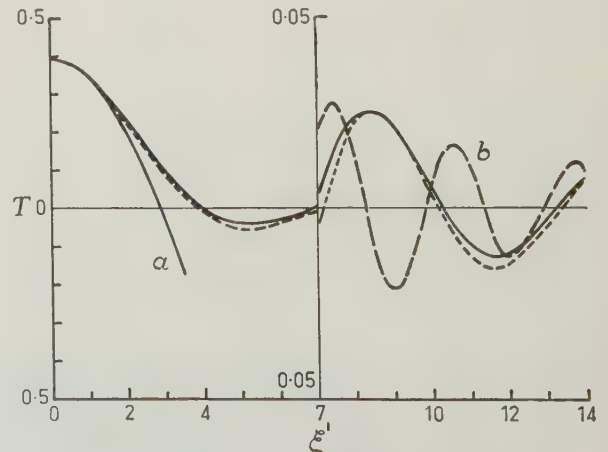


Fig. 2. — Contrast Transmission Function $T(\xi', \omega)$ for $\omega = 0.5$ with various approximations to it.
Full curve: $T(\xi', \omega)$

Broken curve: $\mathbf{P}_1(0, \omega) \Lambda_1 \{ 4 \omega (1 - \omega) \xi' \}$
(a) Approximation for small defocusing,
(b) Approximation from geometrical optics.

The value given by this approximation is shown in figure 2. Where shown it is less than the true value, but, as the error never exceeds 0.017, the approximation should be sufficiently accurate for many purposes. For large ξ' there is no displacement along the axis of ξ' , but there is an error in magnitude of $(1-\omega) - \frac{3}{2} P_1(0, \omega)$ which, for $\omega = 0.5$, gives 1.106 times the true value.

When ξ' is sufficiently large, the curve of $T(\xi', \omega)$ first reaches zero near $\omega = 0$ as may be seen from figure 1. The value of ω is then given approximately by $\Lambda_1(4\omega\xi') = 0$, i. e.

$$\begin{aligned}\omega &\simeq 0.96 \xi'^{-1} \\ &= 0.15 D^{-1}\end{aligned}$$

where D is the defocusing in λ .

(d) OTHER PUPIL SHAPES. (1) *Rectangular pupil.* If the pupil is square or rectangular, β and γ are redefined to be unity at the edge of the pupil and equation (5) becomes

$$\begin{aligned}T(\xi', \omega) &= S' \int \omega \cos \{4\omega\xi'(\beta - \omega)\} d\beta \\ (14) \quad &= \sin \left\{ 4\omega(1-\omega)\xi' \right\} / 4\omega\xi' \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{P}_{\frac{1}{2}}(4\omega\xi', \omega) \mathbf{e}^{-i\omega^2\xi'} \right\}.\end{aligned}$$

The latter form corresponds to equation (9) but involves functions of order $1/2$.

(2) *Annular pupil.* If a circular pupil has a central circular obscuration whose diameter is p times that of the edge of the pupil, the domains A_0 and $A_{2\omega}$ are annuli and [11]

$$\begin{aligned}T(\Delta, \omega) &= \frac{1}{1-p^2} \left\{ I_{0,2\omega}(\Delta; 1, \omega) - \right. \\ (15) \quad &- I_{0,2\omega} \left(\Delta; 1, \frac{1-p^2+4\omega^2}{4\omega} \right) - \\ &- I_{0,2\omega} \left(\Delta; p, \frac{4\omega^2-1+p^2}{4\omega p} \right) + \\ &\left. + I_{0,2\omega} \left(\Delta; p, \frac{\omega}{p} \right) \right\},\end{aligned}$$

where $I_{m,n}(\Delta; r, s)$ is an integral similar to (4) but for spacial frequencies m and n and an aberration Δ taken over a segment of a circle of radius r and angular opening $2 \arccos s$;

$$\begin{aligned}(16) \quad I_{m,n}(\Delta; r, s) &= 0 \quad (s > 1) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{rs}^r \int_{-\sqrt{r^2-\beta^2}}^{+\sqrt{r^2-\beta^2}} g(\beta-m, \gamma) g^*(\beta-n, \gamma) d\beta d\gamma \\ &\quad (1 \geq s \geq -1) \\ &= I_{m,n}(\Delta; r, -1) \quad (s < -1),\end{aligned}$$

g being expressed in terms of the aberration Δ .

For a defocusing, when $|s| \leq 1$,

$$(17) \quad I_{m,n}(\xi'; r, s) = r^2 \operatorname{Re} \left[\mathbf{e}^{i(m^2-n^2)\xi'} \mathbf{P}_1 \{ 2r(n-m)\xi', s \} \right]$$

and the result is given in terms of the tabulated function \mathbf{P}_1 . For an annular pupil

$$\begin{aligned}I_{0,2\omega}(\xi'; r, s) &= 0 \quad (s < 1) \\ (18) \quad &= r^2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{e}^{-4i\omega^2\xi'} \mathbf{P}_1(4r\omega\xi', s) \right\} \\ &\quad (1 \geq s \geq -1) \\ &= 2r^2 \Lambda_1(4r\omega\xi') \cos 4\omega^2\xi' \\ &\quad (s < -1).\end{aligned}$$

In figure 3, contrast transmission functions are shown for $\xi' = 0, 1.5, 3$ and 6 for square, circular and annular apertures, the last having an obscuration of $p = 0.3$.

III. **Coherent and partially coherent illumination.** — The image of a grating with coherent or partially coherent illumination has been studied theoretically by HOPKINS [12]. He has shown that the illumination in the image of a periodic object cannot be specified by a simple contrast transmission factor for each frequency present, so complex structures cannot be treated by a direct application of the results found for a simple sinusoidal object. Thus the sinusoidal object studied in this section is not fundamental in the sense that it is for incoherent illumination but it merely illustrates the method.

To compare the results with those found for incoherent illumination, we shall take as object a grating transmitting a luminance $1 + \cos 2\omega\eta$. This luminance could be associated with any arbitrary phase relation but we shall study the simplest case where the complex amplitude transmittance is given by

$$(19) \quad f(\eta) = \sqrt{2} \cos \omega\eta = 2^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^{i\omega\eta} + \mathbf{e}^{-i\omega\eta}).$$

As HOPKINS has indicated, such a grating would have $\lambda/2$ phase strips over alternate half periods.

(a) **COHERENT ILLUMINATION.** — HOPKINS has shown that, provided the object given by (19) is resolved, its image has unit contrast for any aberration or plane of focus. If the illumination is central, the limit of resolution is $\omega = 1$.

(b) **PARTIALLY COHERENT ILLUMINATION.** — We shall consider the illumination as due to a centrally placed source of limited size. Its image S at the exit pupil will be taken to be uniformly illuminated circle of radius σ ; σ is then related to the degree of coherence being 0 for coherent illumination while $\sigma = \infty$ corresponds to incoherent illumination.

If the object is a periodic line structure, its complex amplitude can be represented by

$$f(\eta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_m a(m) \mathbf{e}^{im\eta}.$$

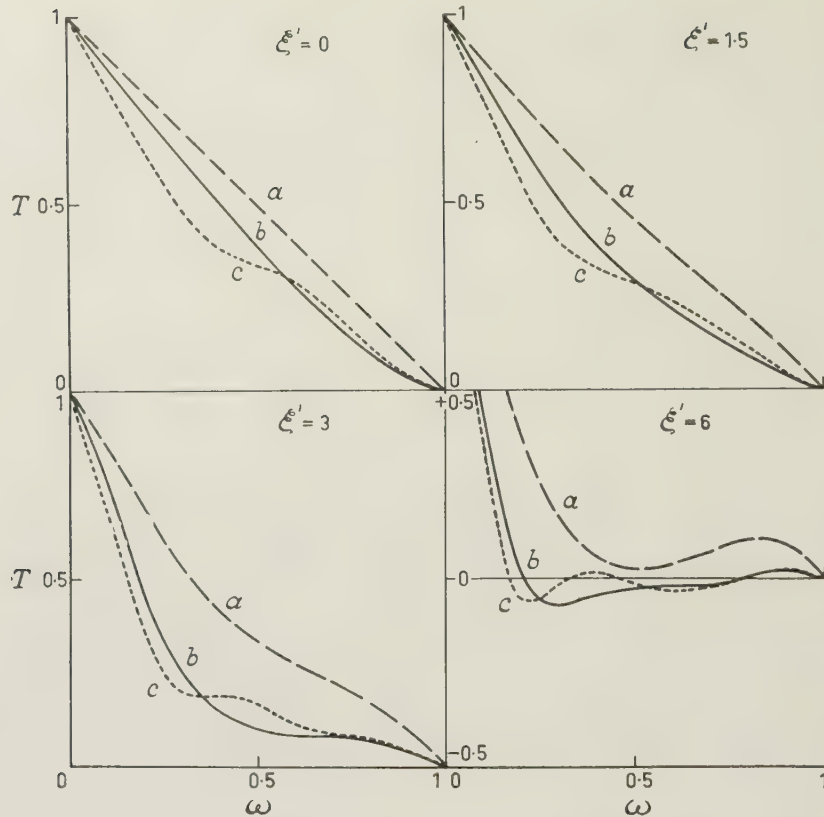


FIG. 3. — Contrast Transmission Functions for various apertures for $\xi' = 0, 1.5, 3$ and 6
(a) square aperture ; (b) circular aperture ;
(c) annular aperture with obscuration $p = 0.3$.

In the notation of this paper, HOPKINS has shown quite generally that the illumination in the image plane is given by a double summation over all pairs of frequencies m and n

$$(20) \quad E'(\eta') = \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_n t(m, n) a(m) a^*(n) e^{i(m-n)\eta'},$$

where

$$(21) \quad t(m, n) = \frac{1}{A_0 \times S} \iint_{-\infty}^{+\infty} s(\beta, \gamma) g(\beta-m, \gamma) g^*(\beta-n, \gamma) d\beta d\gamma,$$

$s(\beta, \gamma)$ being the illumination at the pupil due to the source, and it is taken to be unity over S and zero outside. The integral (21) should be taken over $A_m \times A_n \times S$, the area common to three circles. As this domain can be broken up into segments of circles, the result can be expressed in terms of $I_{m,n}(\xi'; r, s)$ and hence in terms of P_1 . The normalizing factor $A_0 \times S$ is the area common to the source and the pupil.

The object (19) has spacial frequencies $+\omega$ and $-\omega$, so the summation (20) must be made over these values. For each frequency, $a(m) = \sqrt{\pi}$. Hence

$$E'(\eta') = \frac{1}{2} \left\{ t(\omega, \omega) + t(-\omega, -\omega) \right\} + \frac{1}{2} t(\omega, -\omega) e^{2i\omega\eta'} + \frac{1}{2} t(-\omega, \omega) e^{-2i\omega\eta'}.$$

For symmetrical aberrations such as a defocusing,

$$t(m, n) = t(-m, -n)$$

so that $E'(\eta') = t(\omega, \omega) + t(-\omega, \omega) \cos 2\omega\eta'$ and the central contrast

$$(22) \quad C' = t(-\omega, \omega)/t(\omega, \omega).$$

If $|\omega| \geq 1$, the surfaces A_ω and $A_{-\omega}$ have no region in common and the contrast is zero. For $|\omega| < 1$ figure 4 shows the domains of integration for four possible values of σ .

It is found that

$$t(\omega, \omega) = \frac{\pi}{A_0 \times S} \frac{1}{2} \left\{ I_{0,\omega} \left(0; 1, \frac{1-\sigma^2+\omega^2}{2\omega} \right) + I_{0,\omega} \left(0; \sigma, \frac{\omega^2-1+\sigma^2}{2\omega\sigma} \right) \right\}$$

and

$$t(-\omega, \omega) = \frac{\pi}{A_0 \times S} I_{0,2\omega}(\xi'; 1, \omega) \quad \left(\sigma > \sqrt{1-\omega^2} \right)$$

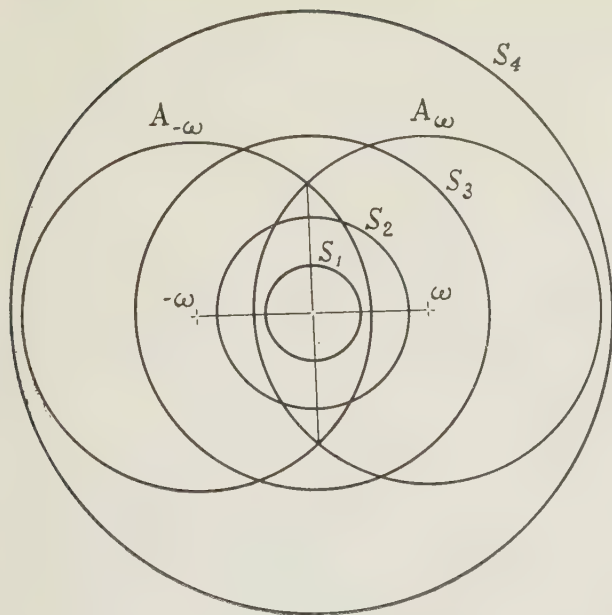


FIG. 4. — The domain of integration for various sizes of source.

$$S_1 : \sigma < 1 - \omega \quad ; \quad S_2 : 1 - \omega < \sigma < (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$S_3 : (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} < \sigma < 1 + \omega \quad ; \quad S_4 : \sigma > 1 + \omega.$$

$$(23) = \frac{\pi}{A_0 \times S} \left\{ I_{0,2\omega} \left(\xi' ; 1, \frac{1 - \sigma^2 + \omega^2}{2\omega} \right) - \right.$$

$$- I_{-\omega,\omega} \left(\xi' ; \sigma, \frac{1 - \sigma^2 - \omega^2}{2\omega\sigma} \right) +$$

$$+ I_{-\omega,\omega}(\xi' ; \sigma, 0) \left. \right\}$$

$$(\sigma < \sqrt{1 - \omega^2})$$

where, as before,

$$I_{m,n}(\xi' ; r, s) = 0 \quad (s > 1)$$

$$= I_{m,n}(\xi' ; r, -1) \quad (s < -1).$$

For $\sigma \geq 1 + \omega$ the contrast is the same as that given by incoherent illumination; a source of $\sigma \geq 2$ is effectively incoherent for this object at all frequencies. As the diameter of the source is reduced, the image contrast increases and tends to unity as σ tends to zero, the value for coherent illumination. The limit of resolution is $\omega = 1$ for all values of σ . Curves are given in figure 5 of the central contrast of the image for $\xi' = 0, 1.5, 3$ and 6 and $\sigma = 0, 0.5, 1, 1.2$ and 2 .

The conclusions in the previous paragraph apply only to the object chosen. If the object, studied by HOPKINS, of amplitude

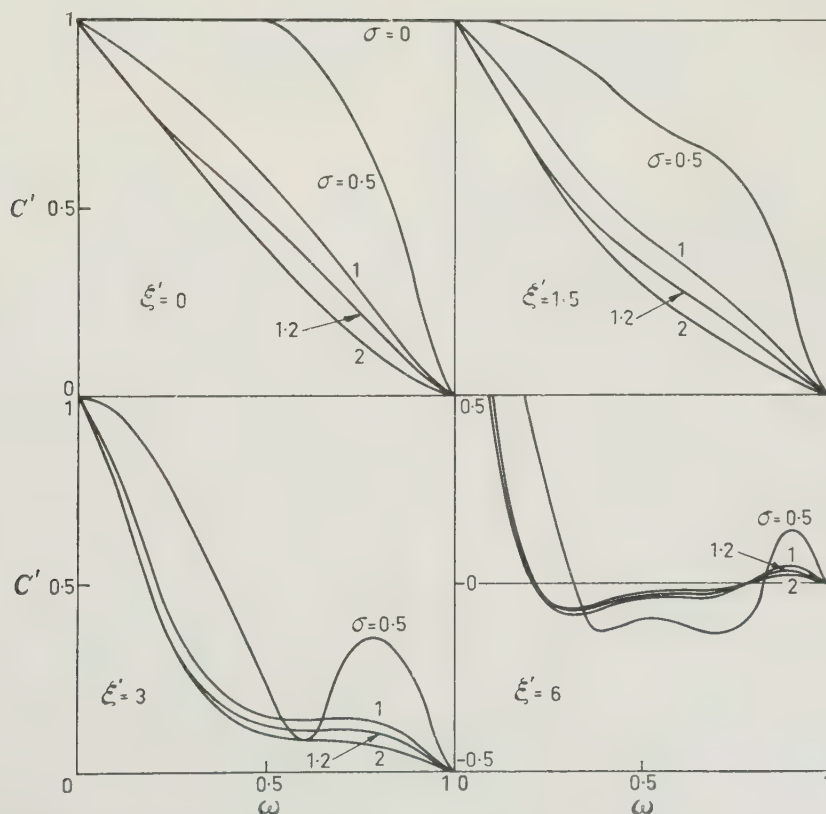


FIG. 5. — Central image contrast for an object of amplitude $\sqrt{2} \cos \omega \eta$ for defocusings $\xi' = 0, 1.5, 3$ and 6 and source sizes $\sigma = 0, 0.5, 1.0, 1.2$ and 2 .

$$f(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \omega \eta)$$

is considered, it is found that the limit of resolution is $\omega = 1$ for $\sigma = 0$ and it increases to $\omega = 2$ as σ increases to infinity. This type of object thus conforms with the result that the limit often found in practice for incoherent illumination is twice that for central coherent illumination. A source of $\sigma \geq 3$ is effectively incoherent at all frequencies.

The out of focus image contrast for this latter object can be calculated by the same method as indicated above; however now the three frequencies $-\omega$, 0 and $+\omega$ must be taken into account.

IV. The image of finite gratings in incoherent illumination. — When sinusoidal objects are used to test optical systems, only a grating of finite size can be used and it is of interest to see how far the results obtained can differ from the predicted results for infinite gratings. In this section, the illumination is calculated at various points in the image, formed at the focus of a perfect optical system, of a grating consisting of a finite number of lines or periods of infinite length.

The results obtained depend on the luminance outside the grating. The simplest case where the surround is "grey" and has luminance equal to the mean value of that of the grating is shown in figure 6a and can be represented, for n complete periods, by

$$B(\eta) = \begin{cases} 1 + \cos 2\omega\eta & (|2\omega\eta| \leq n\pi) \\ 1 & (|2\omega\eta| > n\pi) \end{cases}$$

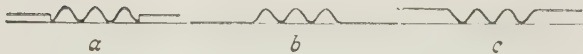


FIG. 6. — Finite sinusoidal object with 3 periods
(a) Grey background; (b) Black background;
(c) White background.

For a circular pupil and incoherent illumination, the central illumination at the image is

$$E'(0) = 1 + T_n(0, \omega),$$

where $T_n(0, \omega)$ is the contrast transmission function for n periods. It is given by

$$(24) \quad T_n(0, \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{n\pi}{2\omega}} \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \cos 2\omega\eta \, d\eta.$$

The same contrast transmission factors would be obtained if a sinusoidal object were moved past a hole in a background of any luminance and the variations of the light falling on a slit in the image plane were measured [9].

Visual measurements are generally made on square wave gratings having either a black or a white sur-

round. For the corresponding sinusoidal gratings with:

$$B(\eta) = \begin{cases} \text{Black surround,} & \text{White surround,} \\ 1 - (-1)^n \cos 2\omega\eta & = 1 + (-1)^n \cos 2\omega\eta \\ \text{with } (|2\omega\eta| \leq n\pi) & = 2 \\ = 0 & \text{with } (|2\omega\eta| > n\pi), \end{cases}$$

if $I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\mathbf{H}_1(2x)}{x^2} dx$ is STRUVE's integral [13],

the illumination at r half periods from the centre ($\eta' = r\pi/2\omega$) for an object with a black surround is given by

$$(25) \quad \begin{aligned} E'\left(\frac{r\pi}{2\omega}\right) &= I\left(\frac{n+r}{2\omega}\pi\right) + I\left(\frac{n-r}{2\omega}\pi\right) - \\ &- \frac{1}{2} (-1)^n \{ T_{n+r}(0, \omega) + T_{n-r}(0, \omega) \} - \\ &- (-1)^n \frac{\sin r\pi}{\pi} \int_{\frac{n-r}{2\omega}\pi}^{\frac{n+r}{2\omega}\pi} \frac{\mathbf{H}_1(2\eta)}{\eta^2} \sin 2\omega\eta \, d\eta, \end{aligned}$$

the last term being zero when r is an integer. For a white surround the illumination is two minus this value.

The image contrast can be found by comparing the central illumination with that at one half period each side; the expression

$$= (-1)^n \frac{E'(0) - E'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}{E'(0) + E'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}$$

is a suitable measure of the contrast transmission. It is positive for normal contrast and becomes negative when the contrast is reversed and points in the geometrical image of light lines are darker than those in the image of dark lines.

$T_n(0, \omega)$ has been calculated by numerical integration for small values of n , and by integration of the asymptotic expansion of $\mathbf{H}_1(x)$ when n is sufficiently large. Results are given in Table II, together with values of the contrast for an object with a black surround.

It is seen that very few periods are required to give a result very close to that for an infinite grating. The effect of the black surround is to give a less accurate value; in general it increases the contrast while a white surround would reduce it by about the same amount.

V. Resolving power tests. — From these foregoing results, certain general conclusions can be drawn concerning resolving power tests and false resolution. Although such conclusions apply strictly only to a

TABLE II

Object of n finite periods(a) $T_n(0, \omega)$ contrast transmission factor for grey surround

(b) Effective factor for black surround

	ω											
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	2.0
(a)												
$n = 1$	0.876	0.754	0.633	0.520	0.396	0.291	0.213	0.158	0.119	0.092	0.071	0.013
2	0.872	0.746	0.622	0.502	0.390	0.281	0.178	0.099	0.045	0.012	— 0.007	— 0.017
3	0.873	0.747	0.624	0.505	0.391	0.287	0.189	0.105	0.043	0.011	— 0.002	— 0.010
4	0.873	0.747	0.624	0.504	0.391	0.284	0.189	0.101	0.037	0.005	— 0.005	— 0.002
∞	0.873	0.747	0.624	0.505	0.391	0.285	0.188	0.104	0.037	0.000	0.000	0.000
(b)												
$n = 2$	0.884	0.765	0.646	0.530	0.412	0.299	0.196	0.108	0.040	— 0.014	— 0.039	— 0.062
3	0.881	0.762	0.642	0.526	0.412	0.302	0.204	0.118	0.051	0.013	— 0.004	0.030

defocusing, they should indicate what could be expected in the presence of other aberrations.

If the limit of resolution is taken to be the frequency above which no image contrast, either direct or reversed, is seen, it is always unity for an infinite grating no matter what aberration is present. Taking account of a finite threshold for visual detection of contrast (conventionally 0.02) the limit would be slightly less, but for high contrast objects it is very little affected by aberrations so, as has been frequently indicated, such a test is of little use for detecting small aberrations. If a finite grating is used, some contrast may appear beyond the limit given by infinite gratings. This represents a false resolution, and the distinction between this and the variations in contrast before the limit of resolutions is difficult to make in practice.

considered to be false resolution, the *practical* limit of resolution being taken as the frequency at which the contrast transmission curve first drops to zero (or, in practice, 0.02). This convention avoids the major effects of limiting the grating to a finite number of periods, for this limit is considerably less than $\omega = 1$.

With this practical definition of resolving power, figure 7 shows the variation of resolving power ω with defocusing for objects of contrast 1 and 0.1, the threshold of contrast detection being taken as 0.02. For the high contrast object, the variation at first is negligible, then the curve folds back and only at high aberrations ($D > 0.6 \lambda$) is there a smooth variation of resolution with aberration. It is in this region that this test is successful. The low contrast object however gives a useful test for all amounts of aberration.

The approximate value of the resolving power

$$\omega \simeq 0.15 D^{-1}$$

obtained from equation (13) is shown. Although derived from the approximation $1 - \omega \simeq 1$, it is useful over a wide range of ω .

VI. Acknowledgements. — The author wishes to acknowledge the assistance of Miss J. WARD in the computations.

Appendix. — After this work had been prepared for publication, a paper on « The frequency of a defocused optical system » by HOPKINS [14] appeared covering the same ground as the present paper in the sections applicable to incoherent illumination and circular or rectangular apertures. Similar results are given extending however, when the spacial frequency is small, to larger defocusing than we treated here. These results may be intercompared using the changes of notation :

$$S = 2\omega, \quad \omega_2 = D\lambda = 1/2 \xi \lambda / \pi$$

However high contrast test objects have been widely used for testing such systems as camera lenses. For these tests, the first reversal of contrast and any subsequent detectable image structure is generally

The two papers differ however in the shape of the curve representing the variation with defocusing of the resolving power or bandwidth for high contrast objects.

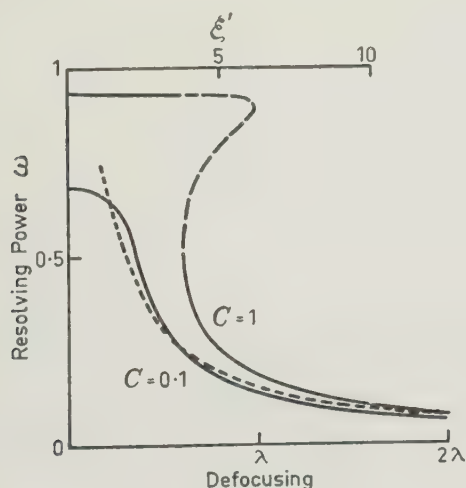


FIG. 7. — Resolving power (ω) as a function of defocusing for object contrasts $C = 1$ and $C = 0.1$. The image contrast detectable is taken as $C' = 0.02$. Broken curve represents $\omega = 0.15 D^{-1}$.

REFERENCES

- [1] O. THEIMER, G. D. WASSERMANN and E. WOLF, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **212**, 1952, p. 426.
 [2] A. MARÉCHAL, Thèse, Paris, 1947; *Rev. Opt.*, **26**, 1947, p. 257.
 [3] E. WOLF, *Rep. Prog. Phys.*, **14**, 1951, p. 95.
 [4] W. WEINSTEIN, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44**, 1954, p. 610.
 [5] E. WOLF, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **204**, 1951, p. 533.
 [6] S. M. J. RÉGNIER, *Rev. Opt.*, **29**, 1950, p. 315.
 [7] E. W. H. SELWYN, *Photo. J.*, **88 B**, 1948, pp. 6, 46.
 E. W. H. SELWYN, « Optical Image Evaluation » (N. B. S. Circular 526, Washington), 1954, p. 219.
 [8] O. H. SCHADE, *J. Soc. Motion Pict. Telev. Eng.*, **56**, 1951, p. 137.
 O. H. SCHADE, « Optical Image Evaluation », p. 231.
 [9] P. LINDBERG, *Opt. Acta*, **1**, 1954, p. 80.
 [10] W. H. STEEL and J. Y. WARD, *Proc. Camb. phil. Soc.* (in press).
 [11] W. H. STEEL, Thèse, Paris, 1952; *Rev. Opt.*, **32**, 1953, pp. 4, 143, 269.
 [12] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **217**, 1954, p. 408.
 [13] H. STRUVE, *Wied. Ann.*, **17**, 1882, p. 1008.
 [14] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **231**, 1955, p. 91.

Manuscrit reçu le 15 août 1955.

Optical instruments for the vacuum ultra-violet

R. W. DITCHBURN

University of Reading, England

SUMMARY. — *The limitations on the design of optical instruments for the regions 2000 Å-1200 Å (near vacuum ultra-violet) and 1200 Å-200 Å (far vacuum ultra-violet) due to (a) the necessity of enclosing the optical path in vacuum and (b) the properties of optical materials in these regions are stated.*

RÉSUMÉ. — *L'auteur décrit les limitations rencontrées dans la réalisation des instruments optiques pour les régions 2000 Å-1200 Å (ultraviolet à vide proche) et 1200 Å-200 Å (ultraviolet à vide lointain) résultant de la nécessité d'enfermer le chemin optique dans le vide, et des propriétés des matériaux optiques dans ces régions du spectre.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Beim Entwurf optischer Instrumente für das Gebiet von 2000 Å-1200 Å (Vakuum-Ultraviolett) und das Gebiet von 1200 Å-200 Å (extrem kurzwelliges Vakuum-Ultraviolett) sind Beschränkungen gegeben a) dadurch, dass der optische Weg ganz im Vakuum liegen muss, und b) durch die Eigenschaften der optischen Medien in diesen Spektralbereichen. Diese Beschränkungen werden kurz behandelt.*

I. Introduction. — The vacuum ultra-violet (V. U. V.) region of the spectrum may be regarded as extending from about 1900 Å (at which wavelength oxygen begins to absorb strongly) to about 200 Å (below which wavelength the techniques of soft X-ray spectroscopy are used). For the discussion of the design of instruments it is convenient to divide this region into (a) the near vacuum ultra-violet (N. V. U. V.) from 1900 Å to about 1200 Å and (b) the far vacuum ultra-violet (1200 Å-200 Å). Instruments for the N. V. U. V. may use lenses, prisms, windows, etc. The optical design is limited by vacuum requirements, by the restricted choice of optical materials and by the low reflection coefficients of mirrors. Instruments for the F. V. U. V. have rather more stringent vacuum requirements and have special difficulties due to the strong absorption of all solids so that lenses and prisms are not possible and windows must be extremely thin.

II. Vacuum problems. — (a) *Degree of vacuum required.* If a vacuum spectrograph is to be used solely for measurements of wavelength, then an absorption of 30 % of the radiation by residual gases is not serious. If, however, the instrument is to be used for intensity measurements, it is desirable to reduce this absorption to less than 1 %. If this is not done, variations in the pressure of the residual gas will cause the transmission factor of the instrument to vary. Some of the absorbed radiation may be re-emitted by the gas and be a source of "parasitic light".

If the residual gas is due to leaks it will contain O_2 , N_2 , H_2O and CO_2 . If it is derived from the walls of the vessel, cracked oil from diffusion pumps, etc., it may contain, in addition to the above molecules, hydrocarbons, CO, H_2 , etc. All these molecules give absorption continua due to photo-dissociation in the N. V. U. V. and in the F. V. U. V. Additional continua due to photo-ionization become important between 900 Å and 300 Å. The present writer has recently summarised measurements of the absorption coefficients (DITCHBURN [1]). The mean absorption coefficient of the residual gases depends on their composition and on the wavelength. For the design of instruments, we need only an order of magnitude. A coefficient of 500 cm^{-1} (for the residual gas at atmospheric pressure) is a reasonable average value though somewhat higher values may be reached at about 700 Å. Using this figure we may calculate p_1 and p_{30} i. e. the pressures at which the residual gases produce 1 % and 30 % absorption respectively. We find that, if l cm is the optical path in the vacuum,

(i) for a small prism instrument used in the N.V.U.V.

$$(l = 30), p_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ mm}; p_{30} = 2 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

(ii) for a 1 m concave grating instrument

$$(l = 200), p_1 = 10^{-4} \text{ mm}; p_{30} = 3 \times 10^{-3} \text{ mm}.$$

The above discussion takes no account of absorption due to bands. Measurements on the coefficients for lines of the SCHUMANN-RUNGE system of O_2 are given

by DITCHBURN and HEDDLE [2]. The true absorption coefficients corresponding to the centres of lines in bands are very high but, in an instrument of small or moderate dispersion, the effective absorption coefficient is always an average over a wavelength range of the order of the resolution limit. A strong line in a band may give $\alpha = 2.5 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ over a range of $4 \times 10^{-3} \text{ \AA}$. If the limit of resolution is 0.1 \AA the mean coefficient is 10^4 cm^{-1} and, to prevent any observable effect, pressures ten times lower than those given under (ii) would be needed. However, most lines in bands are more than ten times weaker and the above estimates may be retained. With a 6 m concave-grating spectrograph band lines would be sharply resolved and a pressure below 10^{-6} mm Hg would be needed to remove all effects due to band absorption. An instrument of this type would probably be used only for wavelength measurements and a pressure of 10^{-5} mm Hg could then be tolerated.

(b) *Static or dynamic vacuum.* A good vacuum may be produced either (i) by elimination of leaks and cleaning the walls or (ii) by using powerful diffusion pumps to maintain a low pressure in spite of small leaks and gases evolved from walls. The first type of vacuum (static vacuum) remains good when the pumps are shut off. It is essential to have a good *static* vacuum for absorption measurements in which the spectrograph is used as the absorption vessel and, on the whole, it is usually best in vacuum spectroscopy to eliminate the leaks rather than to pump away the gases from leaks.

(c) *Use of a transparent gas.* Pure nitrogen is effectively transparent through the whole N. V. U. V. It would be possible to carry out many types of experiment by circulating nitrogen through the spectrograph and through a purifier. Helium could be used in a similar way for all wavelengths above 520 \AA . Hydrogen is also transparent through the whole N. V. U. V. and part of the F. V. U. V. but explosion danger makes it less convenient to use. Air is fairly transparent at certain wavelengths below 1250 \AA and PURCELL [3] has made use of this property.

(d) *Vacuum design.* To obtain a good static vacuum it is important to avoid porosities on a microscopic and on a macroscopic scale. Castings, which usually contain microscopic porosities, should be avoided if at all possible. Welds and joints should be reduced to a minimum. Stainless steel is probably the best metal but, on account of cost, solid drawn brass or bronze is used. In an optical instrument for the visible, the optical design is dominant — "the brass must fit the glass". In one for the vacuum ultra-violet the optical designer must sometimes adjust his requirements in order to fit the instrument into a compact and easily constructed case.

An optical instrument usually contains many bolts, some of which close blind holes. The threads of the bolts and the holes constitute macroscopic porosities

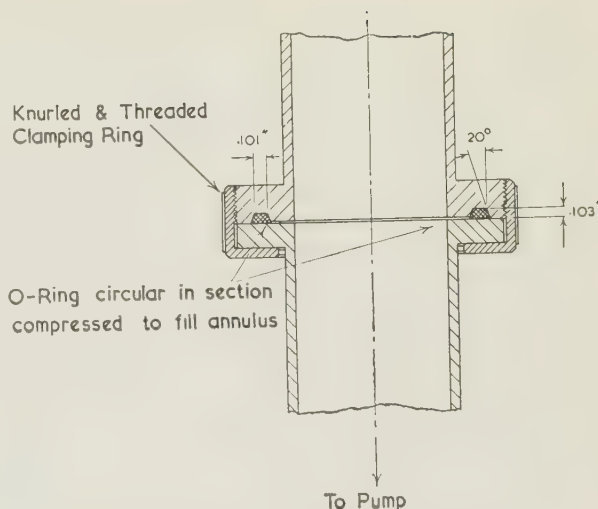


FIG. 1. — Vacuum seal which maintains accurate location of parts.

which release gas slowly into the body of the instrument. To avoid this effect a deep slot perpendicular to the threads should be made in each screw. A standard vacuum joint is shown in figure 1. No vacuum difficulties have been found with this type of joint and, as will be seen below, it has considerable advantages in location of optical components.

Various devices have been employed for transmitting movements into the vacuum. Usually the movement transmitted is a rotation. Rotation within the vacuum is obtained either directly or by means of a tangent screw and translation within the vacuum is obtained by a screw drive. The method most commonly used to convey rotation into the vacuum is the seal devised by WILSON [4]. This is satisfactory for a time if the shaft is well polished and if the rubber washers are cut with a specially made die. These seals do, however, give intermittent trouble. The O-ring seal shown in figure 2a is much more reliable. It is possible to carry a translatory motion into the vacuum by means of a metal bellows as shown in figure 2b. This method is satisfactory in the large vacuum taps at-

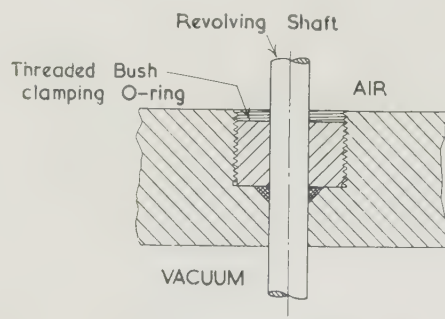


FIG. 2a. — Seal for transmitting rotary motion into a vacuum. When exceptionally good vacuum is essential two rings may be used and the space between them is then pumped.

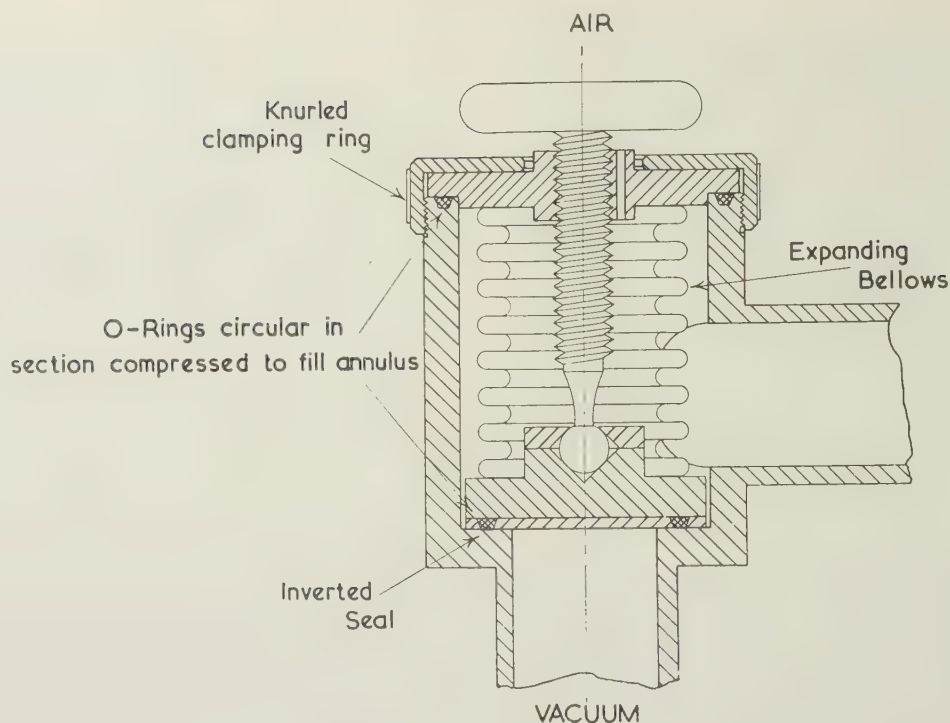


FIG. 2b. — Seal to carry translatory motion into vacuum.

ched to some instruments (see below). If it is to be used for moving an optical component special attention in design is needed to ensure that the location is not affected by a change either in the strength of the bellows or in the atmospheric pressure. It is difficult to obtain a long traverse this way which is therefore not suitable for moving the plate of a spectrograph. A rotation may also be conveyed into the vacuum through a bellows which is flexed but not twisted (ROBIN and VODAR [5]). This method may be very satisfactory when commercial development has made it small and convenient. A "home-made" device of this type is likely to be inconveniently large if excessive flexure of the bellows is to be avoided.

III. Mechanical location and focusing. — (a) *Tolerance of focus.* Consider a concave grating whose radius of curvature is r , with n lines per cm and a width w of ruling so that the total number of lines is nw . Let d be the distance, measured in the focal plane between two lines whose mean wavelength is λ and whose wavelength difference is $\Delta\lambda$. Suppose that the grating is used at near normal incidence and that these lines are just resolved in the m^{th} order.

Then :

- (1) $\Delta\lambda = \lambda/mnw$
- (2) and $d = rmn \Delta\lambda$
- (3) so that $d = r \lambda/w$

The aperture is $a = w/r$, so that these two lines will

be confused if there is an error of focus D_f given by

$$(4) \quad D_f = \lambda(r/w)^2 = \lambda/a^2$$

We see from (4) that D_f depends only on the wavelength and on the aperture and not on the order or the number of lines. Let us now consider a practical case. Let $r = 100$ cm and $w = 4$ cm. Then $D_f = 0.13$ mm for $\lambda = 2000$ Å and $D_f = 0.03$ mm for $\lambda = 400$ Å. These figures, taken by themselves, would suggest that we need to provide mechanical adjustments accurate and stable to within 0.05 mm for the N. V. U. V. and to 0.01 mm or better for the F. V. U. V. They must, however, be modified by the following considerations. Suppose the number of lines per cm is 6000. Then (1) shows that resolution is obtained with $\Delta\lambda = 0.08$ Å at $\lambda = 2000$ Å. The dispersion is about 17 Å/mm so that $d = 0.005$ mm. Theoretical resolving power can be closely approached if a slit 0.005 mm wide is used. HEDDLE [6] controlled the focus by taking a series of photographs of the oxygen bands with slightly different settings and examined them with a microphotometer to obtain the best focus. He could locate the focus to about 0.1 mm. With a grating of 15,000 lines/cm the dispersion would be greater and it might be possible to locate the focus to 0.05 mm. The grain size on a photographic plate would prevent a more accurate location of focus (for very short wavelengths) with a spectrograph. The slit width necessary to pass sufficient energy in a monochromator is sufficiently wide to prevent theoretical resolving power

being reached in the F. V. U. V. Thus we conclude that, for an instrument of 100 cm radius of curvature the practical accuracy of focus will never be better than 0.05 mm.

Since the aperture remains constant, the value of D_f remains unchanged when we pass from $r = 100$ and $w = 4$ to $r = 600$ and $w = 24$. The separation of lines which are just resolved increases 6 times and it would therefore appear that an accuracy of focus approaching 0.01 mm might be required in the F. V. U. V., provided that the grating is being used so near to the symmetrical position that other aberrations are negligible.

(b) *Mechanical stability under pressure changes.* The tube of a small telescope fulfils two functions (i) to act as a cover which excludes dust and stray light and (ii) to maintain the desired separation and orientation of the optical components. In large instruments these functions are separated; the dome of a telescope acts as a cover and the location is maintained by an independent system of girders which are designed to have a good strength/weight ratio. In instruments for the vacuum ultra-violet the cover has also to maintain the vacuum. It is stressed by the air pressure. It is convenient in small instruments to use the cover to locate the optical components but, in larger instruments, independent mounting is essential.

Let us suppose that the cover of an instrument consists of a closed right circular cylinder of wall thickness t , mean radius R and length l . Let E be the value of YOUNG'S modulus for the material and let Δl be the change in length due to a change of pressure ΔP .

$$(5) \quad \text{Then } \frac{\Delta l}{l} = \frac{\pi R^2 \Delta P}{2 \pi R t E}$$

or

$$(6) \quad \Delta l = \frac{R l \Delta P}{2 t E}.$$

Let $E = 10^{12}$ dynes/cm²; $R = 10$ cm; $t = 0.5$ cm.

$$l = 100 \text{ cm}; \Delta P = 10^6 \text{ dynes/cm}^2.$$

Then $\Delta l = 10^{-3}$ cm = 0.01 mm.

Thus we see that the change in length due to a whole atmosphere change of pressure is only one fifth of the permissible tolerance of focus given above. Even if the cover were only 0.2 cm thick and the material were a fairly soft brass ($E = 0.75 \times 10^{12}$ dynes/cm²), the yield would only be 0.03 mm. Moreover, if the instrument is always to be used under vacuum we are concerned only with changes of atmospheric pressure i. e. with $\Delta P = \pm 0.03 \times 10^6$ dynes/cm² and the resulting change of length is negligible. This condition therefore does not prevent the cover being used to support the optical parts. However, a hydrostatic pressure applied to a structure which is not uniformly strong may cause it to bend or twist slightly. If a distortion of this type should cause the focussed image to move sideways across the plate of a spectrograph or

the exit slit of a monochromator by as much as 0.001 mm then an effective loss of definition would result. Thus a simple symmetrical cover may be satisfactory but one which has been asymmetrically weakened by the insertion of side tubes may bend.

It is often convenient to have the cover in two or three sections for ease of assembly. If this is done the sections may be joined by vacuum seals with rubber rings of the type shown in figure 1 provided that the grooves are cut deep enough to admit the rubber and sufficiently strong bolts are provided to bring the metal surfaces into hard contact. If bolts are used they should be symmetrically placed.

With these precautions, location by means of the cover is satisfactory up to a length of about 100 cm. For a 500 cm instrument the radius of tube must be increased to at least 15 cm. Referring to equation (6) we see that, for the same wall thickness, this implies a change in focus of 0.15 mm for $\Delta P = 10^6$ dynes/cm² or 0.005 mm for $\Delta P = 0.03 \times 10^6$ dynes/cm². Since the tolerance of focus is now very small, the deformation is running near to the tolerance. With a wall thickness of 1 cm, it should still be possible to use the cover for location, provided the support is strong enough to ensure that the cover does not deform under its own weight of more than half a ton but the use of a girder structure inside the cover to maintain the optical location is now almost essential.

It is necessary to include a rubber joint or other antivibration link between a rotary pump or a backing pump and the spectrograph. It is also desirable to mount these pumps on rubber to avoid transmitting vibrations to the optical system via the floor.

(c) *Focusing and other adjustments of optical components.* In the design of any optical instrument it is necessary to provide for (i) the initial adjustment and focussing by means of "preset" adjustments and (ii) adjustments and movements which need to be altered fairly often when the instrument is in use. In the design of instruments for the vacuum ultra-violet it is necessary to consider which controls must be adjusted without admitting air to the instrument and to reduce the number of these as far as possible. For convenience, it is desirable to have all the controls of type (ii) operated from outside the vacuum so that compromise is needed. Many instruments have interacting controls. In a 1 m concave grating spectrograph the tilt of the grating should be correct to within 2×10^{-4} radian. In changing the wavelength range by 1 000 Å, the grating must be rotated by about 0.1 radian, and a small adjustment of focus must be made. The rotation should be about an axis in the plane of the grating and exactly parallel to the rulings. Obviously a very small error in the axis of rotation, will give a component of 10^{-4} radian about the axis of tilt and a small adjustment of tilt then has to be made after the rotation. Moreover this adjustment cannot be made visually but requires a series of photographs. If two adjustments do interact in this

way, then the second adjustment (*e. g.* the tilt) should be operated from outside the vacuum.

It is possible to use an instrument in the vacuum ultra-violet with no controls operated from outside the vacuum. Part of the cover is then removed (in a darkened room) after each exposure and the plate or film removed for development. This method may be needed with a grazing incidence spectrograph covering a wide range of the spectrum in one exposure but obviously it should be avoided, if at all possible, even when a fairly elaborate mechanism may be required to move the plateholder.

With the above considerations in mind we may now draw up a list of the controls which it is desirable to have operated from outside the vacuum :

(I) Withdrawal of the darkslide and movement of the plate-holder for successive exposures (one control).

(II) Shutter for exposure.

(III) Alteration of width of the slit (or both slits of a monochromator).

(IV) A mirror which can be inserted to see whether any external source is correctly aligned.

(V) A sliding valve to enable the camera box to be separated from the rest of the vacuum so that the plate can be changed without admitting air to the main body of the instrument.

Examples of these movements will be included in the instruments described in a later paper. Controls (II) and (IV) may appear to be luxuries but they have a very great effect on speed of operation and fairly simple magnetic devices are possible.

In addition to the above it is desirable to have :

(a) for a prism spectrograph : a HARTMANN diaphragm if wavelength comparisons are to be made ;

(b) for a grating spectrograph or monochromator : a single control which alters both the angle of the grating and at the same time gives a translation (to preserve focus) without affecting the tilt adjustment.

Adjustment (b) will be satisfactory only if a sensitive device for bringing the grating surface into the axis is provided. If this device is available it is possible to pre-set it by observations made with visible light.

(d) *Accuracy of optical components.* An optical component intended for use in the V. U. V. is usually tested with visible light. The effect on the wavefront of errors in figure is much greater when the component is in use with short wave-radiation than it is under the conditions of test. An error of one twentieth of a wavelength of visible light (280 \AA) in the surface of a lens or prism produces a deformation of about $1/8 \lambda$ at 1500 \AA . This is about as much as can be tolerated if several components are used to form the image. Ordinary methods of polishing will reach this accuracy, if tests are strictly applied. The situation in the F. V. U. V. is much less favourable. In order to reduce the deformation of wave-front to $1/4 \lambda$ at 400 \AA , the surface of a grating used near normal incidence must be true to 50 \AA or about one hundredth of a wavelength

of visible light. This is beyond the range of ordinary optical polishing and theoretical resolving power is not usually obtained for wavelengths below 1000 \AA .

IV. Properties of optical materials and surfaces. —

(a) *Useful limits of transparency.* Some absorption curves for good quality crystalline quartz are shown in figure 3. The measurements on thin specimens (curve IV) indicate an absorption edge (λ_T) at 1440 \AA . At lower wavelengths the absorption rises sharply, becoming too high for measurement and probably reaching values of order 10^5 cm^{-1} within about 200 \AA of the edge. On the high wavelength side transmission measurements on thin specimens do not give reliable values for absorption coefficients less than about 20 cm^{-1} . Curve I, obtained from thicker specimens, shows that the absorption falls to 0.2 cm^{-1} at 1550 \AA and remains at this value at higher wavelengths.

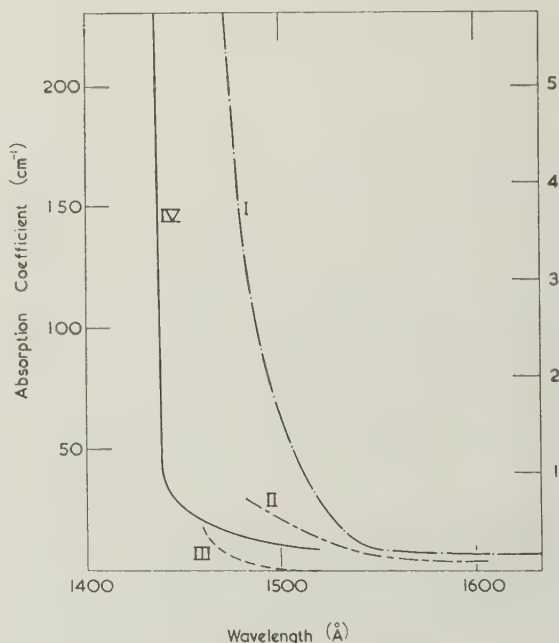


FIG. 3. — Absorption of Quartz : (I) Natural quartz POWELL [7] ; (II) Natural quartz GILLES, VODAR et al [8] ; (III) Continuation of curve [1] ; (IV) Natural and synthetic quartz MITCHELL and PAIGE [9].

The right-hand scale applies to curves (I) and (II) and the left-hand scale to curves (III) and (IV).

The main absorption in the region of wavelengths greater than λ_T is caused by crystal defects. There is therefore a useful limit of transparency which depends on the specimen. The following useful limits are suggested :

- (a) 50 % transmission in a thickness of 2.5 cm ($\mu < 0.2 \text{ cm}^{-1}$) ;
- (b) 50 % transmission in a thickness of 5 mm ($\mu < 1 \text{ cm}^{-1}$) ;
- (c) 50 % transmission in a thickness of 100 \AA ($\mu < 5 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$).

Limit (a) is appropriate for a prism, limit (b) for ordinary windows, or lenses and (c) for special thin windows (e. g. of Cellophane) a few hundred angstroms thick.

Limit (a) for many specimens of natural quartz is between 2 000 Å and 1 800 Å and limit (b) between 1 900 Å and 1 800 Å. New synthetic crystals (and rare natural crystals) have limit (a) at about 1 600 Å and (b) at 1 500 Å.

Very pure fluorite has an absorption edge at about 1 200 Å and there is reason to believe that pure lithium fluoride would have an edge a little below 1 000 Å. However, fluorite often has limit (a) between 1 500 Å and 1 400 Å and limit (b) at about 1 380 Å. Lithium fluoride is extremely variable and good specimens are rare. These have limit (b) at 1 100 Å or lower and limit (a) at 1 200 Å. For most specimens of lithium fluoride limit (a) is at or above 1 500 Å though limit (b) is below 1 200 Å. The absorption curve slopes more gradually in lithium fluoride than in most substances. Failure to realise this has caused some workers to be disappointed with the performance of lithium fluoride prisms.

The absorption coefficient of Cellophane is of order, $2 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ at about 300 Å and 10^6 cm^{-1} at 800 Å, O' BRYAN [10], and this substance may therefore be used for thin windows in the F. V. U. V. Formulae for these windows have been given by DITCHBURN [11]. Vacuum deposited silicon monoxide has been used and vacuum deposited aluminium oxide would probably be successful.

(b) *Refractive index and dispersion.* Values of the refractive indices of quartz, calcium fluoride and lithium fluoride are shown in figure 4. The shape of these curves is such that it is possible to construct achromats only for wavelengths remote from the absorption edge of any of the components. Since the choice of dispersion curves is limited optical design is correspondingly restricted.

(d) *Reflection coefficients of surfaces.* The reflection coefficients at near normal incidence have been measured for many metals at wavelengths in the N. V. U. V. by BANNING [14], JOHNSON [15], ROBIN and VODAR [16 and 17] and by SABINE [18]. The most detailed work is by ROBIN [16] who gives reflection coefficients for 18° and 45° incidence. Aluminium is the best reflector for most of the region and its reflection coefficient (18° incidence) falls almost linearly from over 80 % at 2 000 Å to about 15 % at 1 200 Å. The reflection coefficient of quartz increases from 2 000 Å to 1 200 Å at which wavelength it gives nearly 25 % reflection. Tungsten carbide gives a nearly constant reflection of 25 % from 2 000 Å to 1 400 Å but falls rapidly below 1 400 Å.

SABINE [18] has measured the reflection coefficients of a large number of metals and for glass at wavelengths down to 400 Å. The best reflectivity at 1 000 Å is 12 % and all metals have very low reflectivities (order 1 or 2 %) at 400 Å. Glass is rather better (order 3 or 4 %) at 400 Å. A few metals, including

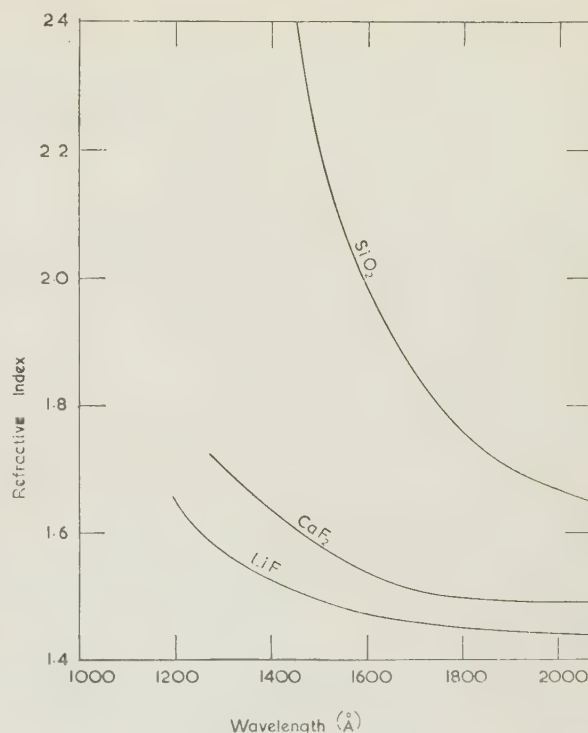


FIG. 4. — Refractive Indices : (1) Quartz (POWELL [7] to 1 850 Å, International Critical Tables 1650-1450 Å); (2) Calcium fluoride, HANKE [12]; (3) Lithium fluoride, SCHNEIDER [13].

chromium, have a maximum reflection of about 7 % at 600 Å. This suggests that it might be possible to increase the effective transmission of a normal incidence grating spectrograph between 1 000 Å and 500 Å by a thin coating of chromium on the grating.

The reflection coefficients measured at 45° incidence are only a little larger than those measured at near normal incidence ROBIN [15]. On theoretical grounds we should not expect much improvement until the angle of incidence exceeds 75°.

A number of workers have reported that some surfaces show greatly decreased reflectivity as they age. PURCELL [3] reports that an aluminium film had a reflectivity of 50 % (at 1 170 Å) 10 minutes after deposition and 14 % after 8 weeks. He also obtained high reflectivities for silicon (33 %) and 36 % (boron carbide). WATANABE [19] reports that a grating which initially had low efficiency gave a 25-fold increase in efficiency when coated with platinum by sputtering.

(e) *Possibility of high efficiency reflecting films.* In the N. V. U. V. a number of solids are transparent in thickness of order $1/4 \lambda$ and it is therefore theoretically possible to design high efficiency reflectors and to make them by vacuum evaporation of suitable layers. It is indeed probable that some of the higher reflectivities reported in the preceding paragraph may be due to the accidental formation of oxide films of the right thickness. In support of this view it may be noted that many workers report that there is little correlation between the appearance of a surface in

visible light and its reflectivity in the vacuum ultra violet. This is because the large difference of wavelength would imply that a film which helps the reflection in the visible is the wrong thickness for the ultra-violet and may act as an anti-reflecting film in that region.

Below $1\,000\text{ \AA}$ it appears that most substances have absorption coefficients which are too low to give good reflection but too high to give high efficiency films. It is not impossible that such films may be developed but the prospect is not good.

V. Conclusion. — (a) *Sources and receptors.* The general description of sources and receptors is not included in this paper but a few points which are very important for the optical designer should be mentioned. In the N. V. U. V. light from the source can be focussed on the slit of an instrument by means of a lens or a concave mirror. This enables us to use many different kinds of discharge tube or a spark (in vacuum or in one of the transparent gases) or an arc as the source. For most problems it is not important that the instrument should have a high f-value. In the F. V. U. V. the source cannot be focussed by a lens and is only very inefficiently focussed by a mirror. The instrument itself usually has only one reflection (at the grating). Efficient use of the radiation is obtained only if the source subtends at the slit an angle equal to the angle subtended by the grating so as to fill the latter with light. It is also necessary to excite the spectra of ionised elements. Discharge tubes which satisfy these criteria have been devised by PO LEE and WEISSLER [20] and by DITCHBURN [11]. Vacuum spark sources originally developed by MILLIKAN, SAWYER and others have been greatly improved by ASTOIN and VODAR [21].

Before 1939 nearly all the work in the V. U. V. had been done with spectrographs because photoreceptors for this region were difficult to prepare and not very sensitive. In the past fifteen years photo-emissive surfaces which yield about 0.05 electrons per photon have been obtained (WAINFAN, WALKER and WEISSLER [22]). This has led to the production of photon counters (CHUBB and FRIEDMAN [23]) and photomultipliers. A review of the latter is given by SCHWETZOFF [24]. These devices are satisfactory in the N. V. U. V. because the sensitive surfaces can be protected by windows of calcium or lithium fluoride. The most convenient way of detecting the F. V. U. V. is to allow the radiation to fall onto a material which fluo-

resces (e. g. sodium salicylate) and measure the blue green light which is emitted. Mr J. JAMES working with a monochrometer at Reading report currents of order 1 000 times the back-ground noise using this method of detection. See also reference [30].

(b) *Actual Instruments.* Recent publications of designs of instruments have been made by BAKER [25], JOHNSON [26], TOUSEY and JOHNSON [27], ROBIN [15], PARKINSON and WILLIAMS [28], WATANABE and INN [29]. VODAR [31] has discussed the general problem of the design of mechanical links for securing automatic focus. The present writer will describe four instruments in a later number of *Optica Acta*. For an account of earlier instruments the reader is referred to BOMBKE "Vacuumspektroskopie" and to SAWYER "Experimental Spectroscopy".

Manuscript reçu le 10 février 1956.

REFERENCES

- [1] DITCHBURN, R. W., *Rocket Exploration of the Upper Atmosphere* (Pergamon Press) (1954), p. 313.
- [2] DITCHBURN, R. W., and HEDDLE, D. W. O., *Proc. Roy. Soc. A*, **226** (1954), p. 509.
- [3] PURCELL, J. D., *J. O. S. A.*, **43** (1953), p. 1166.
- [4] WILSON, R. R., *Rev. Sci. Inst.*, **12** (1941), p. 91.
- [5] ROBIN, S., and VODAR, B., *J. Phys.*, **13** (1952), p. 110.
- [6] HEDDLE, D. W. O. Private communication.
- [7] POWELL, W. M., *Phys. Rev.*, **46** (1934), p. 43.
- [8] GILLES, A., BAUPLÉ, R., ROMAND, J., and VODAR, B., *C. R. Ac. Sc.*, **229** (1949), p. 876.
- [9] MITCHELL, E. W. J., and PAIGE, E. G. S., Private communication.
- [10] O'BRYAN, H. M., *J. O. S. A.*, **22** (1932), p. 739.
- [11] DITCHBURN, R. W., *Proc. Roy. Soc. A*, **229** (1955), p. 44.
- [12] HANDKE, *Landolt-Börnstein Tables*, vol. 2, p. 911 (5th edn.).
- [13] SCHNEIDER, E. G., *Phys. Rev.* **49** (1936), p. 341.
- [14] BANNING, M., *J. O. S. A.*, **32** (1942), p. 98.
- [15] JOHNSON, B. K., *Proc. Phys. Soc.* **53** (1941), p. 258.
- [16] ROBIN S. Thesis (Paris), 1954.
- [17] ROBIN, S. and VODAR, B., *J. Phys.*, **13** (1952), p. 492.
- [18] SABINE, G. B., *Phys. Rev.*, **55** (1939), p. 1064.
- [19] WATANABE, K., *J. O. S. A.*, **43** (1953), p. 318.
- [20] PO LEE and WEISSLER, G. L., *J. O. S. A.*, **42** (1952), p. 80.
- [21] VODAR, B. and ASTOIN, N., *Nature*, **166** (1950), p. 1029.
- [22] WAINFAN, N., WALKER, W. C. and WEISSLER, G. L., *J. App. Phys.*, **24** (1953), p. 1318.
- [23] CHUBB, T. A. and FRIEDMAN, H., *Rev. Sc. Inst.*, **26** (1955), p. 493.
- [24] SCHWETZOFF, V., *Rev. gén. Elect.* (1954), p. 71.
- [25] BAKER, R. F., *J. O. S. A.*, **28** (1938), p. 55.
- [26] JOHNSON, P. D., *J. O. S. A.*, **42** (1952), p. 278.
- [27] TOUSEY, R., and JOHNSON, F. S., *J. O. S. A.*, **41** (1951), p. 696.
- [28] PARKINSON, W. W. and WILLIAMS, F. E., *J. O. S. A.*, **39** (1949), p. 705.
- [29] WATANABE, K. and INN, E. C. Y., *J. O. S. A.*, **43** (1953), p. 32.
- [30] LITTLE, E. P., *J. O. S. A.*, **36** (1946), p. 168.
- [31] VODAR, B., *Rev. Opt.*, **21** (1942), p. 97.

Herstellung und Verwendung eines gegen Erschütterungen unempfindlichen Quecksilberspiegels als Ebenheitsnormal

R. BÜNNAGEL, Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig

ZUSAMMENFASSUNG. — Der gegen Erschütterungen unempfindliche Quecksilberspiegel besteht aus einer Quecksilberschicht von etwa 0,2 mm Dicke. Die Herstellung einer so dünnen Schicht ist in einem Gefäß aus gut amalgamierendem Metall möglich. Durch eine Versilberung der Innenfläche des Metallgefäßes wird der Spiegel, der sich sonst nach einigen Tagen mit einer Haut bedeckt, haltbar.

Nach zwei verschiedenen interferometrischen Methoden konnte die Ebenheit des Quecksilberspiegels geprüft und die Eignung als Ebenheitsnormal festgestellt werden.

Die Genauigkeit der Ebenheitsprüfung wird durch Anwendung des Quecksilberspiegels wesentlich gesteigert, weil durch entsprechende Verspiegelung der zu untersuchenden optischen Fläche die Vorteile der Vielstrahlinterferenzen ausgenutzt werden können.

Da jeder Flüssigkeitsspiegel bei langsamer Lageänderung zu fließen beginnt, muss er bzw. das Interferometer auf einem festen Untergrund, am besten getrennten Fundament, aufgestellt werden.

SUMMARY. — A mercury mirror which is insensitive to vibration consists of a layer of mercury about 0.2 mm thick. The formation of such a thin layer is achieved by using a vessel of a metal which readily forms an amalgam. By silvering the inner surface of the metal vessel the mirror is made durable, and the formation of a skin on the mercury surface is prevented.

The flatness of the mercury mirror has been tested by two different interferometric methods, and its suitability as a standard flat established. Multiple beam interferometry may be used to increase the accuracy of the testing for flatness.

As every liquid mirror flows when its position is slowly changed, a firm mounding is necessary.

SOMMAIRE. — Le miroir de mercure insensible aux vibrations est formé d'une couche de mercure d'environ 0,2 mm d'épaisseur.

Il est possible d'obtenir une couche aussi mince en utilisant un récipient de métal s'amalgamant facilement.

Le miroir qui, normalement, serait couvert d'une croûte au bout de quelques jours, se conserve grâce à une argenture de la surface intérieure du récipient.

On a vérifié la planéité du miroir de mercure par deux méthodes interférentielles différentes et constaté qu'il convient comme plan étalon.

L'utilisation du miroir de mercure accroît considérablement la précision des contrôles de planéité car, en traitant convenablement les surfaces optiques à examiner, on peut profiter des avantages des interférences à ondes multiples.

Comme tout miroir liquide se déforme lorsqu'on modifie lentement sa position, l'interféromètre doit être monté sur un support rigide, de préférence sur un pilier indépendant.

Einleitung. — In einer früheren Arbeit [1] hat der Verfasser aus viskosen Ölen hergestellte Flüssigkeitsspiegel näher untersucht und dabei gefunden, dass statische Ladungen und geringe Temperaturdifferenzen die Ebenheit beeinträchtigen. Wie gezeigt werden konnte, treten Störungen durch die genannten Faktoren nicht mehr auf, wenn das Leitvermögen grösser als 10^{-11} Ohm $^{-1}$ cm $^{-1}$ ist und die Temperaturdifferenzen 0,01°C nicht wesentlich überschreiten. Die geforderte hohe Temperaturkonstanz, die durch die grosse thermische Ausdehnung, das geringe Wärmeleitvermögen und die hohe Viskosität bedingt ist, erschwert das Arbeiten mit einem Ölspiegel nicht unbeträchtlich. Obige Untersuchungen führten auf den Gedanken, einen Quecksilberspiegel herzustellen, der weitgehend gegen Erschütterungen unempfindlich ist. Wegen der günstigen Materialeigenschaften des Quecksilbers kann auf eine hohe Temperaturkonstanz verzichtet werden, was den Spiegel besonders als Ebenheitsnormal geeignet macht. Im folgenden wird die Herstellung und Verwendung des Quecksilberspiegels näher beschrieben.

Herstellung. — Vorerst sollen kurz zwei Massnahmen betrachtet werden, durch die Störungen durch Erschütterungen verhindert werden können.

Sieht man von einer erschütterungsfreien Aufstellung ab, die wegen der Empfindlichkeit interferome-

trischer Messungen einen mehr oder weniger grossen technischen Aufwand erfordert, so werden gewöhnlich zwei verschiedene Wege eingeschlagen. In dem einen Falle verwendet man für den Spiegel eine Flüssigkeit hoher Viskosität, beispielsweise ein Öl von 1 000 Centipoise. Infolgedessen kann man die Schicht bis zu einigen Millimetern dick wählen und damit die Gefahr einer Beeinträchtigung der Flüssigkeitsoberfläche durch Unebenheiten des Gefässbodens ausschliessen. Jedoch muss man als Nachteil das im Verein mit der hohen Zähigkeit auftretende geringe Leitvermögen für Elektrizität und Wärme in Kauf nehmen. In dem anderen Falle benutzt man eine Flüssigkeit geringer Viskosität und gewinnt damit den Vorteil eines guten elektrischen und thermischen Leitvermögens. Man muss jetzt aber zu dünnen, höchstens einige Zehntelmillimeter betragenden Schichten¹ übergehen und prüfen, ob die unvermeidlichen Bodenebenheiten die Oberfläche nicht beeinträchtigen.

Auf den ersten Blick überrascht es, dass eine leicht bewegliche Flüssigkeit in dünner Schicht eine beträchtliche Zähigkeit zu haben scheint. Die Erscheinung ist aber leicht zu verstehen, wenn man daran denkt, dass die laminare Strömung der Flüssigkeit durch

(1) Versuche mit dünnen Wasserschichten sind 1948 von E. EINSPORN, Deutsches Amt für Mass und Gewicht, Berlin, durchgeführt worden, s. a. E. EINSPORN, *Feingerätechnik* 10, (1954) S. 426.

Kräfte gehemmt wird, die proportional dem Geschwindigkeitsgradienten sind und letzterer in entsprechend dünnen Schichten auch schon bei kleinen Geschwindigkeiten grosse Werte annimmt.

Auf Grund obiger Betrachtung ist zu erwarten, dass Quecksilber für einen Flüssigkeitsspiegel besonders geeignet ist, falls es gelingt, eine genügend dünne Schicht herzustellen. Dies ist nach den durchgeführten Versuchen aber möglich, sofern das Gefäss für den Quecksilberspiegel aus einem Metall besteht, das sich leicht amalgamieren lässt. Denn in diesem Falle benetzt das Quecksilber Wände und Boden des Gefässes und verhält sich ähnlich einem zähen Öl.

Im folgenden sollen nun die praktischen Erfahrungen mitgeteilt werden, die für die Herstellung eines brauchbaren Quecksilberspiegels wichtig sind.

Bei den Versuchen wurde zur Erzielung grosser Wärmekapazität und guter Wärmeleitung eine möglichst dickwandige flache Kupferschale (Wandstärke 1 cm) als Gefäss für den Spiegel benutzt. Die Innenfläche des Bodens war sorgfältig plan gedreht, so dass die Unebenheiten unter 0,1 mm blieben. Um den Boden bequem horizontal ausrichten zu können, was wegen der geringen Schichtdicke des Quecksilbers unbedingt erforderlich ist, waren drei Fusschrauben vorgesehen. Vor dem Amalgamieren der Innenfläche des Kupfergefässes müssen natürlich alle Spuren von Fett, am einfachsten durch Spülen mit Alkohol und Äther, beseitigt werden. Nach den weiteren Erfahrungen gelingt es, das Kupfer schnell und völlig gleichmässig zu amalgamieren, wenn es vorher kurze Zeit mit Salpetersäure der Dichte 1,1 g/cm³ behandelt wird. Um Säurereste und evtl. Spuren von Kupfernitrat zu entfernen, spült man die Schale mit reinem Quecksilber solange, bis das abfliessende Quecksilber keine Verunreinigung mehr mit sich führt. Das benutzte Quecksilber lässt sich wieder verwenden, nachdem es durch Filtrieren gereinigt ist. Schliesslich ist zu empfehlen, das Gefäss mit dem fertigen Quecksilberspiegel zum Schutze vor Staub bis zur Benutzung im Interferometer mit einer Glasplatte zu bedecken.

Auf Grund von Versuchen kann über die Bestimmung der optimalen Schichtdicke folgendes gesagt werden: Schon ohne Interferometer lässt sich durch direkte Beobachtung des Spiegels feststellen, ob die Schichtdicke des Quecksilbers richtig getroffen ist. Dazu erschüttert man die horizontal aufgestellte Kupferschale mit dem Quecksilberspiegel durch starkes Klopfen auf die Tischplatte und beobachtet die vom Rand der Schale ausgehenden Kapillarwellen. Werden letztere auf halbem Weg zur Mitte der Schale durch Reibung aufgezehrt, so ist eine auch für die interferometrische Beobachtung ausreichende Unempfindlichkeit gegen Erschütterungen garantiert. Die Schichtdicke beträgt in diesem Falle etwa 0,2 mm. Da einerseits die Anfälligkeit des Spiegels mit steigender Dicke stark zunimmt, andererseits, wenn letztere zu gering ist, eine Beeinträchtigung der Quecksilberoberfläche durch die Unebenheiten des Bodens zu

befürchten ist, muss obige Angabe innerhalb von $\pm 0,05$ mm eingehalten werden. Noch wegen eines anderen Umstandes, auf den unten eingegangen wird, sollte die untere Grenze nicht unterschritten werden. Bei einem Versuch mit einer 0,3 mm dicken Quecksilberschicht war der Spiegel nicht mehr ruhig genug, um bei den interferometrischen Beobachtungen benutzt werden zu können. Wählt man dagegen zu geringe Schichtdicken von etwa 0,1 mm, wie es bei einer plan geschliffenen Bodenfläche des Gefässes ja möglich wäre, so braucht die Oberfläche des Quecksilbers erfahrungsgemäss einige Stunden bis zur Einstellung, was recht zeitraubend ist. Wie die Erfahrung weiter zeigte, ist der in der beschriebenen Weise hergestellte Quecksilberspiegel nicht lange haltbar, denn nach einigen Tagen überzieht sich die Oberfläche mit einer dünnen Haut, einer Art Oxydschicht. Da die Oberfläche von reinem Quecksilber blank bleibt, kann die Haut nur von dem gelösten Kupfer herrühren, wie dies auch Arbeiten von G. TAMMANN und K. KOLLMANN [2, 3] bestätigen. In diesem Zusammenhang gewinnt eine Veröffentlichung von WICKERS (NBS) [4] besonderes Interesse, worin über Lösungen von Metallen in Quecksilber berichtet wird. Wie in der Arbeit mitgeteilt wird, überziehen sich Lösungen von Gold und Silber im Gegensatz zu denen anderer Metalle nicht mit einer Haut. Ein daraufhin unternommener Versuch, durch Versilberung der Innenfläche der Kupferschale den Quecksilberspiegel haltbar zu machen, war dann auch erfolgreich.

Auf eine andere störende Erscheinung sei noch hingewiesen. Wie festgestellt wurde, setzt sich die Amalgamierung der Innenwand des Gefässes allmählich nach aussen hin fort. Die Folge ist, dass trotz der Glasplatte das Quecksilber über den Rand der Schale kriecht und nach Tagen Tropfen bildet, die an der äusseren Wand hängen und schliesslich abfallen. Um das lästige Herauskriechen zu beseitigen, genügt es, die äusseren Flächen der Schale mit einer festen Lack- oder auch Nickelschicht zu überziehen.

Interferometrische Prüfung. — Wenn auch die Oberfläche des Quecksilberspiegels eine ideal ebene Fläche abzugeben scheint, so muss doch genauer geprüft werden, ob die Fläche tatsächlich den hohen Anforderungen bei interferometrischen Messungen genügt. Zu dem Zweck wurden zwei verschiedene Methoden angewandt.

Die erste Methode bestand aus demselben Verfahren wie bei der Untersuchung der Störungen durch statische Ladungen und Temperaturdifferenzen [1]. Ebenso wie dort wurde durch Aufgiessen von gefärbtem Rizinusöl auf die Oberfläche des Quecksilberspiegels ein Doppelspiegel hergestellt und die Interferenz der Ölschicht im monochromatischen Licht beobachtet. Nach Ausgleich der Temperaturdifferenzen zeigte das Interferenzbild eine gleichmässig helle Fläche ohne Streifen und Schattierungen, woraus dann geschlossen werden konnte, dass auch bei der

geringen Schichtdicke von 0,2 mm Störungen des Quecksilberspiegels durch Unebenheiten des Gefäßbodens nicht auftreten und die Oberfläche eine brauchbare Vergleichsebene abgibt.

Die zweite Methode gründet sich auf den Vergleich zweier Ebenheitsmessungen an ein und derselben optischen Planplatte. In der üblichen Weise (s. unter Anwendung) wurden mit dem Quecksilberspiegel als Vergleichsfläche von der Platte zunächst Interferenzaufnahmen (Abb. 1) in zwei verschiedenen Lagen gemacht.

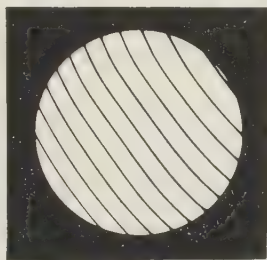


ABB. 1. — Interferenzbild einer optischen Glasfläche zur Prüfung der Ebenheit des Quecksilberspiegels.

Letztere unterschieden sich durch eine Drehung von 120° in der Ebene der Platte. Die Interferenzstreifen mussten, um verglichen zu können, so eingestellt werden, dass die aus den beiden Aufnahmen herzustellenden Topographien⁽²⁾ möglichst auf dieselbe Ebene bezogen werden konnten. Die in Abbildung 2 wieder-

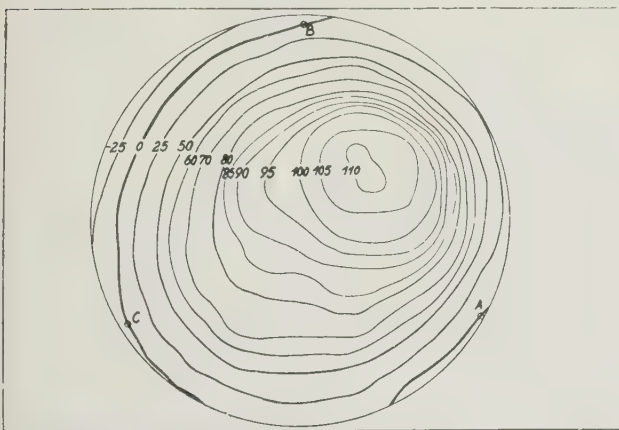


ABB. 2. — Topographie der gegen den Quecksilberspiegel gemessenen optischen Glasfläche, Zahlenangaben der Niveaulinien in nm.

gegebene Topographie stellt einen zentrischen Kreisschnitt der Planfläche von 120 mm Durchmesser durch Niveaulinien mit Zahlenangaben in nm dar und

⁽²⁾ Eine Veröffentlichung des Verf. über das Verfahren wird demnächst in der Zeits. angew. Phys. erscheinen.

bezieht sich auf die durch die Punkte A, B, C der optischen Fläche gelegte Ebene. Die Darstellung, die die Platte in einer der beiden Lagen wiedergibt, stimmt mit der Darstellung der anderen Lage innerhalb der Messgenauigkeit des Verfahrens von 2 nm überein. Daraus folgt zunächst streng genommen aber nur, dass der Quecksilberspiegel von zylindersymmetrischer Gestalt (mit senkrechter Achse) ist, ohne dabei notwendig eben zu sein. Jedoch existiert ausserhalb des durch Kapillarkräfte beeinflussten Randgebietes keine Ursache für eine zylindersymmetrische Abweichung von der Ebene, so dass dort der Spiegel in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der ersten Methode als sehr gute Ebene betrachtet werden kann.

Anwendung. — Wegen des kleinen Reflexionsvermögens müssen zu prüfende Glasflächen bei Messungen gegen die Quecksilberoberfläche verspiegelt werden. Man bedient sich dabei am besten des bekannten Aufdampfverfahrens im Vakuum. Die Verspiegelung bringt nun gegenüber der üblichen Methode einen wesentlichen Vorteil mit sich, so dass der grössere Aufwand sich lohnt. Bei geeignet gewähltem Reflexionsvermögen, das nach TOLANSKY [5] etwa 80 % betragen soll, lässt sich die Methode der Vielstrahlinterferenzen [6, 7] anwenden. Dadurch erhält man an Stelle der mehr oder weniger verwaschenen Interferenzstreifen scharfe schmale Linien, so dass die Interferogramme mit viel grösserer Genauigkeit ausgewertet werden können.

Zuletzt sei noch auf eine Fehlerquelle hingewiesen, die bei der Benutzung eines Flüssigkeitsspiegels als Ebenheitsnormal, ganz gleich, ob er aus Quecksilber oder einer anderen Flüssigkeit besteht, ausgeschlossen werden muss. Wie oben erwähnt wurde, sorgt die Viskosität oder bei leichtbeweglichen Flüssigkeiten die geringe Schichtdicke dafür, dass der Spiegel gegen Erschütterungen unempfindlich ist. Dies schliesst aber noch nicht aus, dass bei einer langsamen Änderung der Lage die Flüssigkeit in Bewegung gerät und infolgedessen die Oberfläche uneben wird. Nach den Erfahrungen genügen schon geringe Durchbiegungen des Fussbodens, z. B. durch eine in der Nähe des Interferometers stehende Person, um die Flüssigkeit zum Fließen zu bringen. Ähnlich wirken sich bei einer Aufstellung des Interferometers im ersten Stockwerk sonst unmerkliche, möglicherweise durch einseitige Sonnenbestrahlung verursachte Lageänderungen des Gebäudes aus. Gegen all diese Störquellen hilft nur die Aufstellung des Interferometers auf einem festen Untergrund, am besten auf einem vom Gebäude getrennten Fundament.

Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug des 3. Teils einer Dissertation mit dem Titel "Untersuchungen über die Eignung eines Flüssigkeitsspiegels als Ebenheitsnormal", die Ende Juni 1954 bei der Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig eingereicht wurde.

Auch an dieser Stelle sei dem Verf. gestattet, Herrn Prof. Dr CARIO, Braunschweig, den schuldigen Dank für viele Anregungen und Hinweise auszusprechen, die zur Bereicherung besonders dieses Teils der Dissertation wesentlich beigetragen haben. Dem Präsidenten der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Herrn Prof. Dr VIEWEG, fühlt sich der Verf. für das Entgegenkommen, die Arbeit zu einer Dissertation ausgestalten zu dürfen, zu grossem Dank verpflichtet.

Manuscript reçu le 29 février 1956.

LITERATUR

- [1] Zeits. angew. Phys. (im Erscheinen).
- [2] G. TAMMANN u. K. KOLLMANN, *Zeits. anorg. Chem.* **160** (1927), S. 242.
- [3] G. TAMMANN u. J. HINÜBER, *Zeits. anorg. Chem.* **160** (1927), S. 249.
- [4] EDWARD WICKERS, NBS, *Chem. Engng News* **20** (1942), S. 1111.
- [5] TOLANSKY, *Multiple-Beam-Interferometry of Surfaces and Films*, Oxford (1948), S. 139.
- [6] M. DÜHMKE, *Phys. Z.* **44** (1943), S. 10.
- [7] M. DÜHMKE, *Metall*, **7** (1953), S. 1000.

The relation between pupil efficiencies for small and extended pupils of entry*

ANNA MARIA ERCOLES, LUCIA RONCHI and G. TORALDO DI FRANCIA,
Istituto Nazionale di Ottica, Arcetri, Firenze (Italia).

SUMMARY. — *The authors investigated the magnitude of the apparent brightness produced by rays impinging on the same retinal area (the fovea) at different inclinations.*

In the measurements the photometric matching fields were illuminated by the method of Maxwellian view. Pupil efficiencies were determined for effective pupils of entry (focussed images in the pupil plane) as follows: a single "pinhole", two pin-holes placed either symmetrically or asymmetrically with respect to the pupil centre, full circles and rings centred in the pupil, and finally, semi-circles. The main object was to find if the observed pupil efficiency for the extended pupil of entry patterns could be derived from the observed pupil efficiencies of the parts by applying the additive law.

The three observers showed different behaviour but in no case was the derived efficiency for an extended pupil of entry pattern greater than the directly observed efficiency (over-additivity). On the other hand, under-additivity does occur.

A tentative theoretical explanation of under-additivity is suggested in terms of inhibition and of possible differences of inclination of the axes of the foveal cones. But it is conceivable that a component of inhibition may depend on the colour-differences which accompany the STILES-CRAWFORD effect.

RÉSUMÉ. — *Les auteurs étudient la luminance apparente produite par des rayons tombant en un même point de la rétine (fovea) avec des inclinaisons différentes. Pendant les mesures, les plages photométriques sont éclairées par la méthode de MAXWELL.*

L'efficacité des pupilles a été déterminée pour des pupilles d'entrée (images formées dans le plan de la pupille) en particulier: pour un simple point ou pour 2 points placés symétriquement ou asymétriquement par rapport au centre de la pupille, pour des ouvertures circulaires ou des anneaux centrés dans la pupille et enfin pour des ouvertures demi-circulaires.

Le but était de déterminer si l'efficacité observée de la pupille pour des formes étendues de pupille d'entrée pouvait être déduite des efficacités de pupille observées partiellement en appliquant la loi d'additivité.

Les 3 observateurs ont eu un comportement différent mais en aucun cas l'efficacité calculée d'une pupille d'entrée étendue n'a été plus grande que l'efficacité totale observée directement (suradditivité). La sous-additivité doit en revanche se produire.

Une explication théorique de la sous-additivité peut être donnée par l'inhibition et par des différences possibles d'inclinaison des axes des cônes de la fovea. Mais il est admissible qu'un facteur d'inhibition puisse dépendre des différences de couleur qui accompagnent l'effet STILES-CRAWFORD.

ZUSAMMENFASSUNG. — *Die Autoren untersuchten die scheinbare Helligkeit, die bei der Einwirkung von Strahlen auf dasselbe Gebiet der Retina (fovea) unter verschiedenen Einfallswinkeln hervorgerufen wurde.*

Bei den Messungen wurden die photometrischen Vergleichsfelder nach der Maxwell'schen Methode beleuchtet. Für verschiedene reale Eintrittspupillen (abgebildet in die Ebene der Augenpupille) wurde die Pupillenwirkung bestimmt, nämlich für ein einzelnes kleines Loch, für zwei kleine Löcher, die symmetrische oder asymmetrisch zur Pupillenmitte lagen, für zentrisch in der Pupille liegende Kreisscheiben oder Ringe, sowie für Halbkreise. Das Ziel war, herauszufinden, ob sich die beobachtete Pupillenwirkung bei einer zusammengesetzten Eintrittspupille aus der beobachteten Wirkung der Teile einfach durch Addition ergibt.

Die drei Beobachter zeigten verschiedenes Verhalten. Aber in keinem Fall war bei einer zusammengesetzten Eintrittspupille die berechnete Wirkung grösser als die unmittelbar beobachtete (Überadditivität). Das Umgekehrte (Unteradditivität) kommt dagegen vor.

Es wird versucht, die Unteradditivität theoretisch zu deuten als Behinderung und mögliches Differieren der Achsenneigung der fovea-Zäpfchen. Es ist aber denkbar, dass die Behinderung zum Teil mit den Farbdifferenzen zusammenhängt, die beim STILES CRAWFORD-Effekt auftreten.

I. Introduction. — In 1933 STILES and CRAWFORD [1] discovered that the rays entering the pupil at points distant from the axis are not so effective visually as rays entering along the axis. The quantitative study of this effect is usually undertaken by using the method of Maxwellian view for both halves of a photometric matching field. It is essential for these

measurements to have the subject's eye in a fixed and reproducible position. The principle of measurements is briefly as follows: the rays from the two half-field form images of two pin-holes, which initially are both adjusted to coincide with the centre of the subject's pupil. The result of the photometric match is a wedge reading which will be considered the origin of the scale. In subsequent measurements one image remains "fixed" at the centre of the pupil, while the other image, which will be termed the "scanning spot" and gives the so-called traversing beam, is shifted out from the

* This research has been made possible through the support and sponsorship of the Air Research and Development Command, United States Air Force, under Contract No. AF61 (514)-634C between its European Office and the Istituto Nazionale di Ottica.

axis to the periphery of the pupil. During the horizontal traverse, the image is moved step by step across the pupil opening on a horizontal line through the pupil centre. The vertical traverse is analogously defined.

Suppose m_o is the reading of the wedge controlling the intensity of the scanning spot when the images are coincident, and m_x is the reading for any other position X of the traversing beam. The relative luminous efficiency of a ray entering the pupil at the position X is defined as the ratio of the intensity of a beam incident axially to that of a beam incident at X and producing the same apparent brightness. Thus

$$(1.1) \quad \eta = \frac{t_o}{t_x}$$

where t_o and t_x are the transmissions corresponding to settings m_o and m_x of the wedge.

Let us consider the curves obtained by plotting η against the separation r between the images at the pupil plane (one of them is always fixed and situated at the centre of the pupil). An examination of these curves shows that the luminous efficiency tends to decrease as the point of entry moves away from the centre of the pupil. Each curve is only approximately symmetrical, and the peak does not always coincide in position with the centre of the pupil [1] [2]. For some observers, a noticeable shift has been found [3], the maximum efficiency occurring at the edge of the pupil.

If the value of η is known for each point of entry of the pupil opening, it should be possible to determine, by integration, the relative luminous efficiency for a pupil of any size and shape. If the position of a point in the pupil opening is specified by polar coordinates r, δ , with the origin at the centre of the pupil, then, for any given shape of the pupil the relative luminous efficiency is given by:

$$(1.2) \quad E = \frac{\iint \eta(r, \delta) r dr d\delta}{\iint r dr d\delta}$$

where the integrals extend over the whole area of the entrance pupil.

It is of interest to investigate whether it is legitimate to determine the luminous efficiency of an entrance pupil of any size, shape and position by the integration (1.2). For this purpose, the values of E computed by means of equation (1.2) are compared with direct experimental determinations E' , which are obtained by the following method: one image is set permanently at the centre of the pupil, while the other image at first coincides with the fixed one, and successively is replaced in turn by a series of circular and concentric images of increasing diameter. A photometric match is made in each case.

It is clear that the corresponding relative efficiency E'_n is to be defined as

$$(1.3) \quad E'_n = \frac{t_o r_o^2}{t_n r_n^2}$$

STILES and CRAWFORD [1] found for one observer that the agreement between the calculated curve and the directly observed values of E'_n was satisfactory (the discrepancy being less than 2%). But, for two other observers, there was some evidence of a small systematic difference in shape between the experimental and the calculated curve. The maximum discrepancy is nearly 6%.

The discrepancy might depend on an insufficient approximation, because the authors considered a value of η depending only on r , whereas η is in general a function of both polar coordinates on the pupil.

The problem of additivity was again examined by TORALDO and SBROLLI [4], in 1947, in order to elucidate the discrepancies concerning the numerical values of the integral STILES and CRAWFORD effect given by different authors. TORALDO and SBROLLI found results suggesting a certain amount of under-additivity. Later, in 1955, the same problem was examined by one of us (L. RONCHI). This author used a pupil sensitometer (which has been described elsewhere [5] [6]) and found that the additivity law was valid for both of her eyes, within the limits of the experimental errors.

We want to emphasize that the last measurements do not take into account the colour change which accompanies the STILES and CRAWFORD effect [7]. Further, these measurements have been made at a relatively low brightness level (nearly 10^{-4} stilbs), so that artificial dilatation of the pupil was not necessary. The use of mydriatics was avoided, because it was found in a previous research [6] that the drug can bring about substantial modifications in visual functions.

The question of the additivity did not seem to be sufficiently clarified, and there was left some doubt about its general validity. We have thought it worthwhile to make a larger number of measurements with different observers. These measurements have shown that the behaviour of different observers may be considerably different, ranging from practically perfect additivity to a definite under-additivity.

II. Experimental Results. — Three observers (L. R., A. F., A. M. E.) have carried out measurements with the pupil sensitometer. The behaviour of the differential STILES-CRAWFORD effect is represented in figures 2.1 and 2.2, where $\log \eta$ is plotted against the distance r of the point of entry considered from the centre of the pupil. For each curve the observer's initials are indicated and it is specified whether the right eye or the left eye has been used. All these curves refer to either horizontal or vertical traverses, while

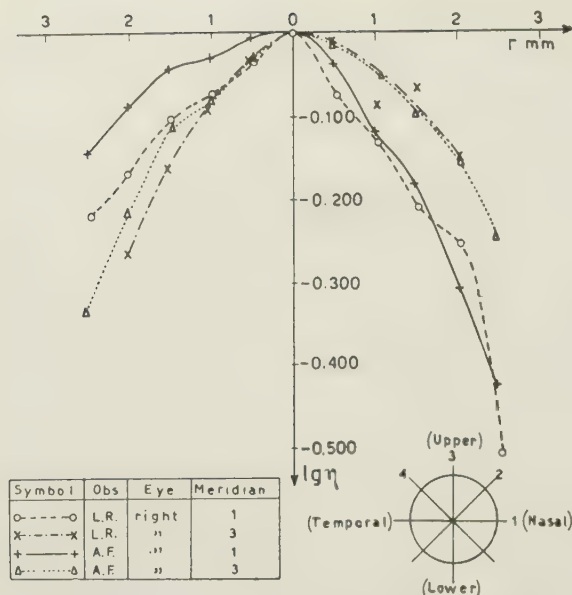


FIG. 2.1. — STILES-CRAWFORD effect measured along horizontal and vertical traverses. Observers L. R. and A. F., right eyes.

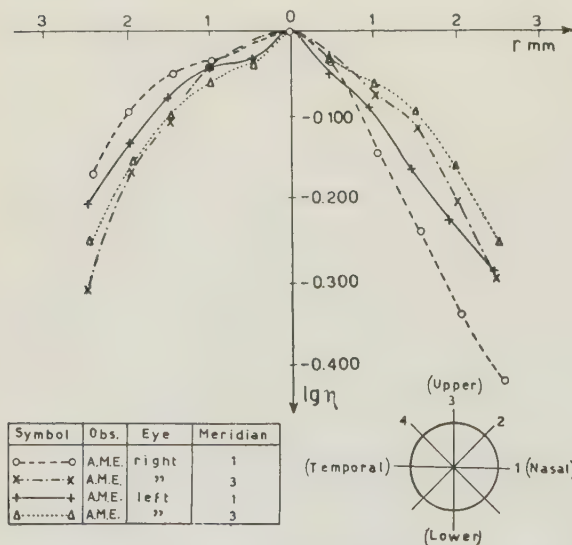


FIG. 2.2. — STILES-CRAWFORD effect measured along horizontal and vertical traverses. Observer A. M. E., right and left eyes.

figure 2.3 refers to 45° traverses of the right and left eye respectively of observer A. M. E.

Next, the integral pupil efficiency of the above observers has been measured by illuminating a series of entire circles on the pupil, as already described in the introduction.

Equations (1.2) and (1.3) have been applied to the data obtained. The results are shown in figures 2.4 to 2.7 where E is plotted against the area A of the pupil illuminated; the solid lines represent the values derived from equation (1.3) and the dotted lines represent the values derived from equation (1.2). The inte-

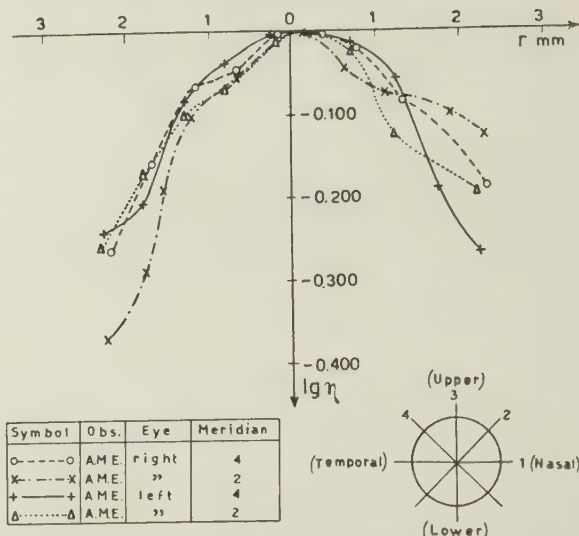


FIG. 2.3. — STILES-CRAWFORD effect measured along a 45° traverse. Observer A. M. E., right and left eyes.

gration has been carried out graphically, utilizing the differential values represented in figures 2.1 to 2.3.

In some cases the measurements have been made at 16 different places of the same ring on the pupil. However, it turned out that the results did not differ materially from those obtained with only 8 or even 4 points on the ring. This shows that one can get a sufficient accuracy by considering only the results of both vertical and horizontal traverses.

For observer L. R. the agreement between the full and the dotted lines is satisfactory, in particular for pupil areas A larger than 9 mm^2 ; an unexpected drop of the dotted line is observed when the area of the pupil is very small.

Approximately the same behaviour is shown by the right eye of observer A. M. E.

The left eye of the same observer seems to be under-additive, and the same occurs to a still larger extent for the right eye of observer A. F. The maximum discrepancy between the two curves is 21% for the second observer and 48% for the third one.

Some other sets of experiments have been carried out in order to study in a more direct manner the problem of additivity. In other words, equations (1.2) and (1.3) have been applied to the following simple cases.

a. *Two points.* — At first, the scanning spot is adjusted to coincide with the centre O of the pupil. This spot produces the field to be measured. At the same point of the subject's pupil a pin-hole is focussed producing the comparison field. A photometric match is performed, and the zero reading of the wedge is thus established. We have, by definition

$$E_0 = 1.$$

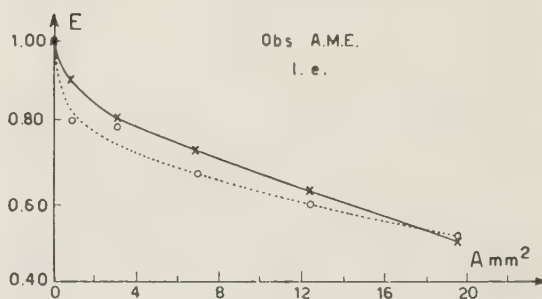
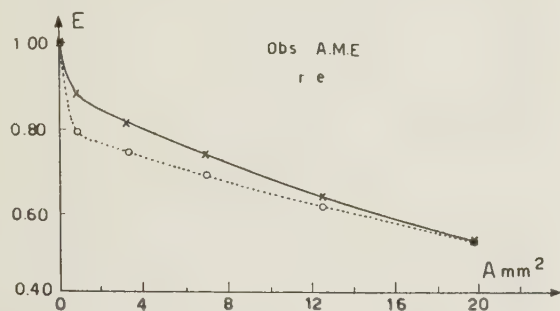
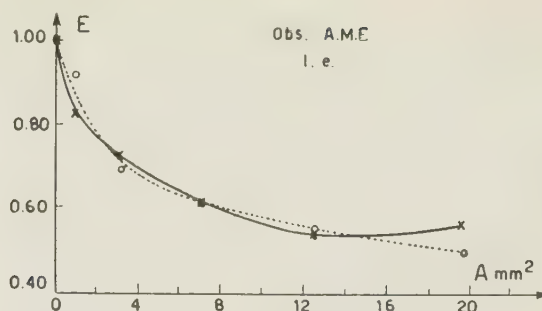
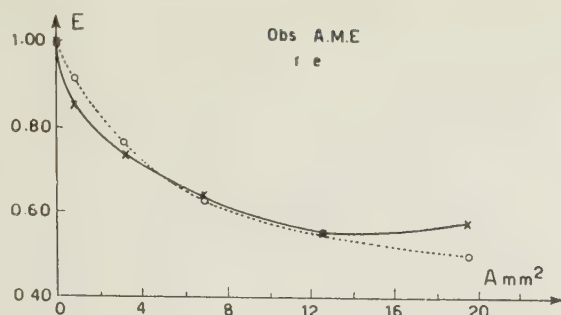


FIG. 2.4. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses represent the values derived from direct measurements and the circles represent the values derived from equation (1.2). Observer L. R., right eye.

FIG. 2.5. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses represent the values derived from direct measurements and the circles represent the values derived from equation (1.2). Observer A. M. E., right eye.

FIG. 2.6. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses represent the values derived from direct measurements and the circles represent the values derived from equation (1.2). Observer A. M. E., left eye.

FIG. 2.7. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses represent the values derived from direct measurements and the circles represent the values derived from equation (1.2). Observer A. F., right eye.

Then the scanning spot is displaced in a vertical direction to a position A; the distance AO is 1.7 mm, and the diameter of the scanning spot 1.0 mm.

From the photometric match the observer determines the efficiency

$$\eta_A = \frac{t_o}{t_A}.$$

Next, the scanning spot is moved from point A to point B which is equally displaced on the opposite side of O, and the efficiency

$$\eta_B = \frac{t_o}{t_B}$$

is measured. Finally, both spots A and B are illuminated equally at the same time so as to obtain the ratio

$$(2.1) \quad E'_{AB} = \frac{1}{2} \eta_{AB} = \frac{t_o}{2 t_{AB}}.$$

From (1.2) we should have

$$E_{AB} = \frac{\eta_A R_A^2 + \eta_B R_B^2}{R_A^2 + R_B^2}$$

where R_A and R_B indicate the radii of the spots at A and B respectively. In our case we had $R_A = R_B$, so that

$$(2.2) \quad E_{AB} = \frac{1}{2} (\eta_A + \eta_B).$$

In case of additivity we should have.

$$E_{AB} = E'_{AB}.$$

The measurements were carried out by three observers with the following results:

(l. e. = left eye, r. e. = right eye)

	η_A	η_B	E_{AB}	η_{AB}	E'_{AB}	$\frac{E_{AB} - E'_{AB}}{E_{AB}}$
Obs. L. R.						
r. e.	.72	.81	.76	1.57	.78	.02
l. e.	.74	.64	.69	1.27	.64	.07
Obs. A. M. E.						
r. e.	.82	.77	.79	1.59	.79	.00
l. e.	.88	.70	.79	1.38	.69	.12
Obs. A. F.						
r. e.	.98	.70	.84	1.46	.73	.13
l. e.	.89	.71	.80	1.41	.70	.12

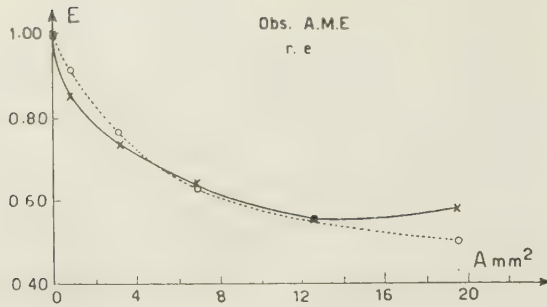


FIG. 2.8. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses refer to direct measurements and the circles to the values obtained by a series of concentric rings focussed at the pupil plane. Observer A. M. E., right eye.

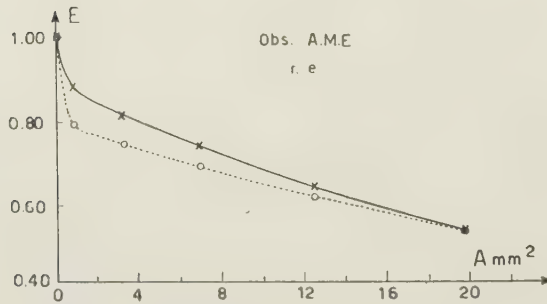


FIG. 2.9. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses refer to direct measurements and the circles to the values obtained by a series of concentric rings focussed at the pupil plane. Observer A. M. E., left eye.

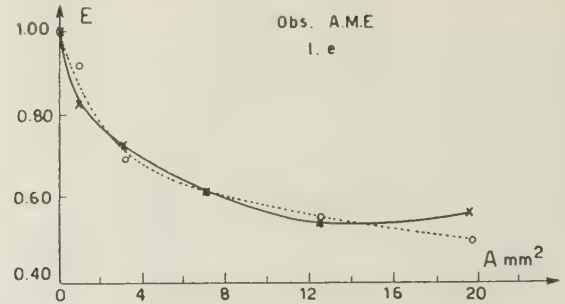


FIG. 2.10. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses refer to direct measurements and the circles to the values obtained by a series of half-circles focussed at the pupil plane. Observer A. M. E., right eye.

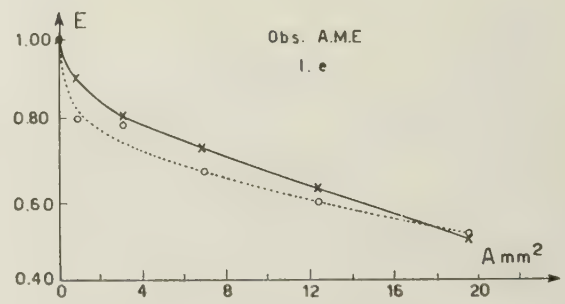


FIG. 2.11. — Pupil efficiency plotted against area of the illuminated pupil (expressed in square millimeters). The crosses refer to direct measurements and the circles to the values obtained by a series of half-circles focussed at the pupil plane. Observer A. M. E., left eye.

The figure in the last column represents the ratio $(E_{AB} - E'_{AB})/E_{AB}$, which is zero for perfect additivity, negative for over-additivity and positive for under-additivity.

The foregoing procedure has been slightly modified by putting $AO = 1.25$ mm and $OB = 2.25$ mm, that is by using two points non-symmetrically placed with respect to O. The data obtained by observer A. M. E. are represented as follows :

	η_A	η_B	E_{AB}	η_{AB}	E'_{AB}	$\frac{E_{AB} - E'_{AB}}{E_{AB}}$
Obs. A. M. E.						
r. e.	.52	.98	.75	1.32	.66	.12
l. e.	.65	.89	.77	1.34	.67	.13

It is seen that by this method different results are obtained depending on the observer and on the eye employed. These results range from practically perfect additivity to a certain amount of under-additivity, and seem to be consistent with those of the preceding section.

b. *Concentric rings.* — The spot producing the comparison field was focussed at the centre of the pupil.

Photometric matches were made by focussing at the pupil plane a series of circles or radii r_0, r_1, \dots, r_n increasing in arithmetic progression. When the value of the radius is r_0 the efficiency E'_0 will be by definition (1.3) $E'_0 = 1$. The other efficiencies E'_n were determined by photometric measurements and (1.3).

Next, a series of concentric rings was used, each comprised between two successive radii of the progression r_0, r_1, \dots, r_n . The width of each ring was .5 mm. Photometric matches were made viewing the test field successively through each ring. If t_i indicates the wedge transmission for the i th ring, the efficiency will be defined by

$$\eta_i = \frac{r_o^2}{r_i^2 - r_{i-1}^2} \cdot \frac{t_o}{t_i}$$

where i may range from 0 to n .

By applying equation (1.2) we have

$$(2.6) \quad E_n = \frac{\sum_{i=0}^n \eta_i (r_i^2 - r_{i-1}^2)}{r_n^2}$$

where by convention $r_{-1} = 0$.

If additivity were valid, we should have $E_n = E'_n$. The measurements in this case were made by observer A. M. E. with both r. e. and l. e. The results are summarized in figures 2.8 and 2.9, where the crosses refer to the direct measurements E'_n and the circles to the computed values E_n . In this case the law of additivity seems to be verified, in agreement with the result of the two-point measurement made by the same observer with the same eye.

c. *Two half circles.* — The following procedure has been adopted: a series of circles of radii r_n are successively focussed at the pupil plane. A photometric match is made between the field viewed through each circle and the comparison field viewed through the pin-hole. When the value of the radius is r_o , by definition (1.3) $E'_o = 1$. The other efficiencies E'_n were determined by photometric measurements and (1.3).

Two other photometric matches are made by exposing either the upper or the lower half of the circle and screening out the other half.

The efficiency of the upper half-circle will be defined by

$$\eta_u = \frac{r_o^2}{\frac{1}{2} r_n^2} \frac{t_o}{t_u}$$

And that of the lower half-circle

$$\eta_l = \frac{r_o^2}{\frac{1}{2} r_n^2} \frac{t_o}{t_l}$$

By applying equation (1.2) we have

$$E_n = \frac{\frac{r_o^2}{\frac{1}{2} r_n^2} \left(\frac{t_o}{t_u} + \frac{t_o}{t_l} \right)}{r_n^2}$$

Measurements were carried out by observer A. M. E. with both r. e. and l. e. The results are shown in figures 2.10 and 2.11 where the crosses refer to direct measurements E'_n , the circles to the computed values E_n . The law of additivity seems to be verified in this case.

III. **Conclusions.** — In the described experiments we examined three normal and experienced observers.

One of them has been found to be additive to a good approximation; another one, under-additive. A third observer is additive with regard to the right eye, but under-additive with regard to the left eye.

It is difficult to offer a completely satisfactory explanation of these phenomena. However, the difference noticed between different observers could suggest some tentative theory.

For instance, a certain under-additivity might be entailed by the combined effect of inhibition and of some amount of disorder of retinal receptors. Perfect additivity would be presented by a retina having the axes of the receptors strictly oriented in the same direction. But it is conceivable that the retinal receptors of some observers are not perfectly parallel to one another. In this case each receptor would present maximum sensitivity in a direction different from the other ones. Thus, when the retina is illuminated from two symmetrical directions some receptors might be more intensely stimulated than when the illumination comes from one of the two directions only with double intensity. As a consequence, the inhibitions of these receptors on the other ones would be greater in the former than in the latter case, giving rise to under-additivity.

Finally, we want to stress the fact that colour changes, which are sometimes very evident in this kind of measurements, could influence the results in a non-negligible way.

Acknowledgements. — The authors wish to express their thanks to Miss ADRIANA FIORENTINI who volunteered to serve as observer.

REFERENCES

- [1] W. S. S. STILES and B. H. CRAWFORD, The luminous efficiency of rays entering the eye pupil at different points. *Proc. Roy. Soc. B* **112** (1933), 428.
- [2] Y. LE GRAND, Recherches sur l'effet STILES-CRAWFORD. *Rev. d'Opt.*, **27** (1948), 759.
- [3] F. FLAMANT, Contribution à l'étude de l'effet STILES-CRAWFORD. *Comm. des Lab. de l'Inst. d'Opt.*, Paris (1947).
- [4] G. TORALDO and W. SBROLLI, Sulla legge integrale dell'effetto STILES-CRAWFORD. *Atti Fond. G. Ronchi* (1947), 100.
- [5] L. RONCHI, Influence d'un mydriatique sur l'effet STILES-CRAWFORD. *Optica Acta*, **2** (1955), 47.
- [6] L. RONCHI, On the influence of mydriatics and miotics on visual functions. *Atti Fond. G. Ronchi* (1955), 285.
- [7] F. FLAMANT and W. S. S. STILES, The directional and spectral sensitivities of the retinal rods to adapting fields of different wave-lengths. *J. Physiol.*, **107** (1948), 187.

Manuscrit reçu le 8 mars 1956.

Zones de sommation partielle

J. OLIVA et M. AGUILAR

Instituto de Optica « Daza de Valdes », Madrid

SOMMAIRE. — On étudie quantitativement la sommation des stimuli produits par deux points lumineux en fonction de leur écart angulaire au moment où l'on se trouve au seuil de perception. A partir de nos résultats expérimentaux, nous faisons une étude de la loi qui donne la luminance du seuil en fonction de l'aire couverte par le stimulus.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird quantitativ die Reizsummation untersucht, die durch zwei leuchtende Punkte in Abhängigkeit ihres Winkelabstandes besteht, und zwar an der Grenze der Wahrnehmung. Die Ergebnisse dieser Untersuchung erlauben es, ein Gesetz aufzustellen, das die Schwellenhelligkeit in Abhängigkeit des Bezirkes enthält, der durch die Reizwirkung überdeckt wird.

SUMMARY. — The summation of the stimuli produced by two luminous points is studied quantitatively as a function of their angular separation, at the limit of perception. The experimental results permit a study of the law governing the threshold luminance as a function of the area covered by the stimulus.

Il est connu que la variation du seuil en fonction des dimensions du test, s'exprime ordinairement par la relation

$$(1) \quad L S^n = K$$

où L est la luminance correspondant au seuil, S , l'aire du test, et K une constante.

On remplace quelquefois la variable S par α ; α étant l'angle qui sous-tend le diamètre du test supposé circulaire.

Pour des intervalles de variation de α différents on a déterminé les valeurs de n , chaque valeur de n correspondant à une loi différente (lois de RICCO, WEBER, PIPER, etc.).

Pour pouvoir interpréter théoriquement ces faits, nous avons étudié spécialement l'interaction entre les différentes parties de la rétine, ce qui nous a permis de trouver la sommation partielle qui existe à l'intérieur de zones plus grandes que celle comprises par une unité sensorielle primaire (par unité sensorielle primaire on entend la zone dans laquelle il y a sommation totale).

Nous avons procédé de la manière suivante : présentant alternativement à l'observateur, d'abord un point lumineux P , puis, deux points A et B séparés par une distance arbitraire comprise entre $4'$ et 4° .

En premier lieu, l'observateur faisait varier l'intensité du point en actionnant un coin photométrique : pour obtenir le seuil d'intensité I_p ; ensuite, pour une distance déterminée entre A et B on a trouvé le seuil de ces points, I_A et I_B .

Bien que nous pensions très intéressant de réaliser des expériences sur la sommation des points lumineux qui auraient des intensités différentes, nous avons cependant toujours travaillé sur des points égaux. Supposons que les intensités des points A et B soient I_A et I_B lorsque l'ensemble est à la limite de perception on a $I_A = I_B$.

Si l'on appelle $I_{A+B} = I_A + I_B$ la somme des intensités que doivent avoir les points pour obtenir le seuil

(nous voyons alors les points confondus), et I_p l'intensité d'un seul point, il y a sommation totale si l'énergie lumineuse arrivant à chacun des points A et B s'intègre en totalité. Il est alors évident que

$$(2) \quad I_{A+B} = I_p,$$

mais quand il y a seulement sommation partielle, c'est-à-dire, lorsqu'une partie de l'énergie arrivant aux images des points se perd pour diverses causes, nous avons

$$(3) \quad I_{A+B} > I_p,$$

$I_{A+B} - I_p$ étant l'énergie perdue.

La sommation sera d'autant plus petite que cette différence sera plus grande, ou mieux encore, le quotient I_{A+B}/I_p , qui ne peut pas atteindre la valeur 2, car si cette valeur est atteinte, on vérifiera que

$$I_{A+B} = 2 I_p,$$

puis

$$I_A = I_B = I_p,$$

ce qui signifie que nous pouvons voir dans le seuil les deux points séparés, si chacun d'eux a atteint à lui seul le seuil d'intensité.

Nous pouvons écrire

$$(4) \quad 1 \leq \frac{I_{A+B}}{I_p} < 2,$$

mais $I_{A+B} = 2 I_A = 2 I_B$, par conséquent, on peut écrire (4) sous la forme

$$(5) \quad 1 \leq \frac{2 I_A}{I_p} < 2,$$

d'où nous obtenons

$$(6) \quad 0,5 \leq \frac{I_A}{I_p} = K < 1,$$

K est la valeur que nous avons trouvée expérimentalement en fonction de la séparation des points, et dont les valeurs sont données dans le tableau I.

TABLEAU I
Valeur de $K = I_A/I_P$

Distance entre les points	8° extrafov. adapt. obscur., 2 observateurs	24° extrafov. adapt. obscur., 2 observateurs	8° extrafov., adapt. 3.10 ⁻² nits, 1 observateur
4'	0,49	0,54	0,52
10'	0,51	0,55	0,60
20'	0,54	0,59	0,65
30'	0,55	0,60	0,64
40'	0,59	0,58	0,64
60'	0,62	0,58	0,68
100'	0,70	0,64	0,75
120'	0,71	0,67	0,76

Nous avons fait les expériences en vision monoculaire avec des extrafovélités de 8° et 24°. Pour l'un des observateurs et pour la plus petite extrafovélité, nous avons utilisé deux niveaux d'adaptation, celui de l'obscurité et celui de 3×10^{-2} nits.

Pour plus amples détails sur la méthode suivie, se reporter à la partie expérimentale.

Lorsque nous avons parlé des lois de la sommation nous avons exprimé les résultats expérimentaux avec la formule :

$$(7) \quad L_p S^n = L_A (2 S)^n.$$

Comme nous attribuons déjà au point une superficie nous remplaçons l'intensité par la luminance.

En vertu de la formule (6), nous pouvons mettre la formule (7) sous la forme

$$(8) \quad L_p S^n = K L_p 2^n S^n,$$

puis

$$(9) \quad n = \frac{\text{colog } K}{\log 2}.$$

Les différentes valeurs de K nous donnent les valeurs théoriques de n , qui coïnciderait avec les valeurs expérimentales si le procédé de sommation pour des points séparés était le même que dans le cas du test circulaire de WEINSTEIN-ARNULF [1].

Nous donnons au tableau II les valeurs de n déduites de la courbe expérimentale de WEINSTEIN-ARNULF et les valeurs calculées avec la formule (10). Les valeurs de K que nous avons utilisées correspondent à une vision extrafovéale de 8°, après une adaptation à l'obscurité.

TABLEAU II

	n selon WEINSTEIN-ARNULF	n déduit de (10)
4'	1	1
10'	1	1
20'	1	0,9
30'	0,9	0,9
40'	0,7	0,7
60'	0,6	0,7
100'	0,5	0,5
120'	0,4	0,5

Toute diminution de la valeur $I_A = K I_p$ entraîne une augmentation de la sommation, et comme

$I_p = \text{constante}$ nous pouvons affirmer que la sommation diminue à mesure que K augmente (nous insisterons plus tard sur le fait que cette variation de K n'est pas continue et que l'on enregistre des sauts dans sa valeur).

RIOPELLE [2] trouve que l'effet de sommation est plus petit lorsque les points qui interviennent sont plus nombreux.

En réalité, dans ce cas, chacun d'eux envoie une plus petite fraction d'énergie lumineuse, et cette perte de sommation pourrait être causée, non par le plus grand nombre de points, mais par la diminution d'intensité de chacun d'eux. En effet supposons qu'au lieu de deux points, nous en ayons huit ; en vertu de la formule (8) on a

$$(10) \quad L_p S^n = K_8 L_p 8^n S^n$$

qui, tenant compte de la formule (8), nous donne

$$(11) \quad K_8 = \frac{K_2}{4^n} ; \quad K_2 = 4^n K_8.$$

Nous travaillons alors avec une séparation de 60' pour laquelle $K_2 = 0,62$ et $n = 0,73$; portons ces valeurs dans la formule (11). Nous obtenons

$$K_8 = 0,23.$$

Valeur très approchée de celle de 0,89/4 soit 0,22 que nous avons trouvée expérimentalement, nous pouvons donc supposer que le raisonnement qui nous permet de déduire la valeur n de la loi des aires, en fonction des valeurs expérimentales de K (formule 9), est valable quel que soit le nombre des points lumineux.

Schéma physiologique de l'interaction rétinienne. — Pour expliquer ce phénomène de la sommation, nous proposons le schéma suivant de la rétine.

Dans la rétine existent des unités sensorielles primaires ; elles ont un diamètre d'environ 10' et sont formées par des cônes et des bâtonnets appartenant au même ganglion.

Il existe, en plus, les unités secondaires, formées d'un noyau de l'unité sensorielle primaire auquel s'ajoutent des cônes et des bâtonnets d'autres ganglions ou du même ganglion à travers des cellules appelées horizontales et des amacrine.

Sur la figure 1, nous représentons schématiquement ce qui, d'après nous, peut être une unité sensorielle

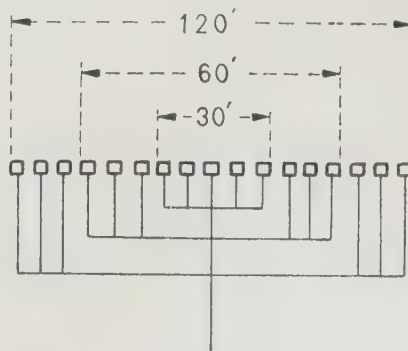


FIG. 1 a.

secondaire. Les petits carrés sont des unités primaires ; et les horizontales et transversales de longueur différente, qui expliqueraient les sauts des valeurs de K dans le tableau I, en ce sens que la perte d'énergie lumineuse serait fonction de la longueur des fibres de liaison ; par suite dans celles qui unissent des unités primaires sous-tendant un angle de $120'$, la perte d'énergie est beaucoup plus grande que dans les transversales qui unissent des primaires séparées seulement de $60'$ (fig. 1 a). Cette différence dans la perte est probablement due à ce que l'énergie doit traverser un plus grand nombre de synapses avant d'arriver au noyau intégrateur. Il peut aussi arriver, comme le représente la figure 1 b, que les différents degrés de sommation soient faits au travers du même

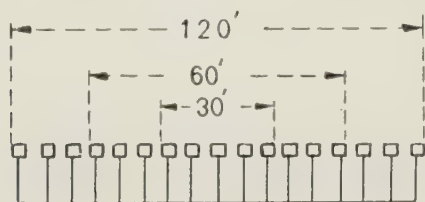


FIG. 1 b.

circuit et que la différence dans la fraction d'énergie arrivant au centre dépende du nombre de synapses intercalées sur le trajet. Enfin, sur la figure 1 c, nous représentons la possibilité que la conduction se produise dans les deux types de circuits cités, soit par une jonction transversale commune, soit par des jonc-

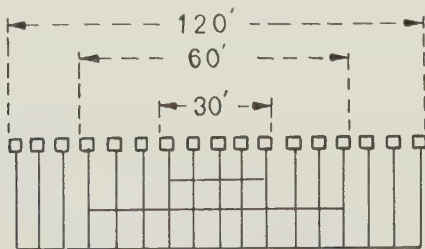


FIG. 1 c.

tions transversales de différentes longueurs dont chacune correspond à des sauts de K que l'on observe sur le tableau.

La variation de K quand le nombre de points lumineux augmente, peut être due, comme nous l'avons déjà dit, à ce que moins d'énergie arrive dans ce cas à chaque unité primaire, ou bien chaque fois que la densité photonique qui passe à travers les transversales est petite, la fraction de photons perdus diminue quand augmente le nombre de ceux qui passent par la jonction ; ce qui expliquerait la perte de sommation quand augmente le nombre de points.

Avec ce schéma nous pouvons interpréter la loi des aires dans le seuil absolu (test circulaire) en disant

que pour percevoir de la lumière il est nécessaire que la somme des énergies, envoyée par toutes les unités sensorielles excitées au centre, soit suffisante pour que nous puissions obtenir la valeur qui correspond au seuil dans l'unité centrale.

Partie expérimentale. — Pour étudier les zones de sommation partielle, nous avons utilisé le dispositif décrit en [3] légèrement modifié. Reportons-nous au schéma de la marche des rayons de la figure 2, de cet article ; nous avons ajouté pour ces expériences deux coins photométriques (compensés) pour donner aux points l'intensité adéquate. Ces deux coins sont pour-

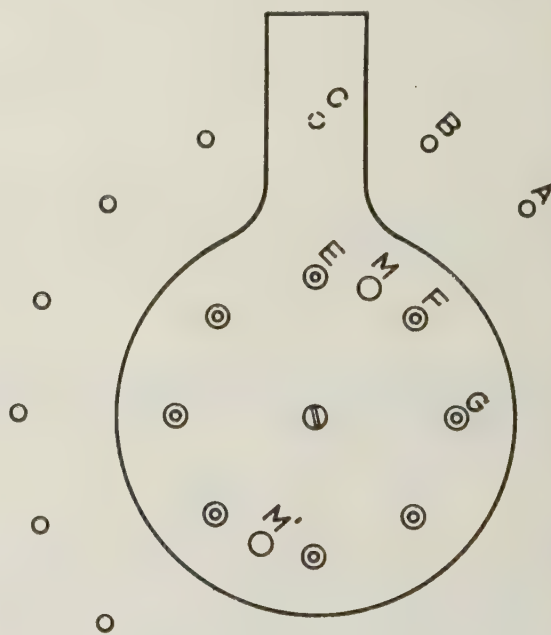


FIG. 2.

vus, d'une aiguille permettant de lire leurs déplacements. Elles ont été placées près de la lentille la plus proche de celle qui servait d'objectif pour l'éclairage du verre opalin (fig. 5 de [3]).

On a disposé en outre deux petits écrans aux extrémités de baguettes pouvant tourner autour d'un axe horizontal afin que le contrôle puisse cacher un des points lumineux, en faisant basculer la baguette correspondante.

Nous avons l'intention de comparer le seuil correspondant à un point lumineux, avec celui correspondant à deux points ; pour cela, afin d'éviter l'erreur que pourrait occasionner une légère différence d'intensité entre les points on compare alternativement le seuil de ces derniers (lorsque les points sont exposés simultanément) avec le seuil du point gauche et du point droit. Néanmoins nous avons pu vérifier qu'il n'y a aucune différence d'intensité appréciable entre les points.

La manière d'opérer est la suivante :

L'observateur après s'être accoutumé une heure à l'obscurité commence à mesurer les seuils, en vision

monoculaire et avec la lumière de fixation. Il donne au point (ou aux points) l'intensité requise pour les voir avec sécurité ; puis il manœuvre le coin jusqu'à cesser de les voir et on note alors la lecture de coin correspondante. Si l'on commence par exemple par exposer les deux points, on expose ensuite un seul des points, puis à nouveau les deux et enfin, l'autre point. C'est ainsi que l'on a opéré pour chaque séparation des points.

L'entraînement des observateurs fut assez long ; nous avons essayé également de répartir les séances de diverses manières pour améliorer les résultats. Finalement nous avons pensé préférable de travailler chaque jour seulement sur trois séparations, afin que chaque séparation puisse être faite quatre fois pendant une séance ; et ces séparations variaient par permutation circulaire.

Pendant la séance suivante, on opérait pour deux séparations de la séance antérieure et une nouvelle, et ainsi de suite. On peut alors comparer parfaitement les résultats des différents jours et apprécier les variations accidentelles de l'observateur.

Pour étudier la sommation correspondant à huit points comparée à celle de deux points nous avons opéré de la façon suivante.

Dans le dispositif de la figure 5, de l'article auquel nous nous sommes déjà rapportés, nous avons substitué la plaque munie des fentes en V et son support, par une autre plaque qui couvrait le verre opalin et portait en son centre huit points égaux correspondants aux sommets d'un octogone régulier. Le diamètre du cercle déterminé par ces points sous-tendait un angle de 60°. On a vissé sur cette plaque une autre, dont on peut voir la forme sur la figure 2, et qui porte aussi huit orifices plus grands que ceux de la plaque

qui la supporte, mais dont les centres coïncident parfaitement avec les autres, lorsque la position est celle indiquée sur la figure. Elle est percée en plus de deux trous (M et M' diamétralement opposés), ainsi, si la plaque tourne de $\frac{\pi}{8}$ radians, tous les points lumineux restent cachés, sauf ceux tombant sur M et M'. Celui qui contrôle peut facilement régler ces tours dans l'obscurité, car la manette de cette petite plaque tournante, porte une saillie C qui s'emboîte dans les renfoncements A et B, que porte l'autre plaque ; de sorte que l'on note exactement le moment où la plaque a tourné d'un angle $\frac{\pi}{8}$.

Pour comparer les seuils, nous avons donc exposé alternativement les huit points et un couple différent chaque fois afin d'éviter la petite erreur que pourrait introduire une légère inégalité entre les points.

Nous avons fait ces expériences avec l'un des deux observateurs utilisés dans les expériences antérieures sur la sommation. On opéra à 8° extrafovéalement, et l'on remarque, qu'au passage de l'intensité seuil lorsque sont exposés les huit points, à celle correspondant à deux points, la différence de coins était de 7 cm ce qui donne pour K_8 une valeur de 0,89. Nous avons déjà vu dans la partie théorique comment cette valeur indique que pour huit points on a une sommation plus petite que pour deux points.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WEINSTEIN et ARNULF. *Comm. Lab. Inst. Opt.* 2 (1946), I.
- [2] RIOPELLE. *Am. J. Psychol.*, 64 (1951) 380.
- [3] J. OLIVA et M. AGUILAR. « Distribution des unités sensorielles dans l'extrafovéa » *Opt. Acta*, 3, 1956, p. 36.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1955.

Lettres à l'éditeur

Étude des spectres de fréquences spatiales dans les négatifs photographiques

P. GROCE et M^{me} M. MARQUET

Institut d'Optique, Paris

En vue de l'application de la théorie de l'information à la photographie, il est utile de connaître les spectres de diffraction des images photographiques et du bruit de fond introduit par le grain.

Dans le but d'effectuer un filtrage des fréquences spatiales par diffraction [1] on est amené à rechercher les conditions dans lesquelles l'amplitude transmise en chaque point de l'image photographique est une fonction linéaire de l'éclairement reçu lors de la prise de vue. La courbe sensitométrique doit donc satisfaire à l'équation

$$D = A - 2 \log | E_0 - E |,$$

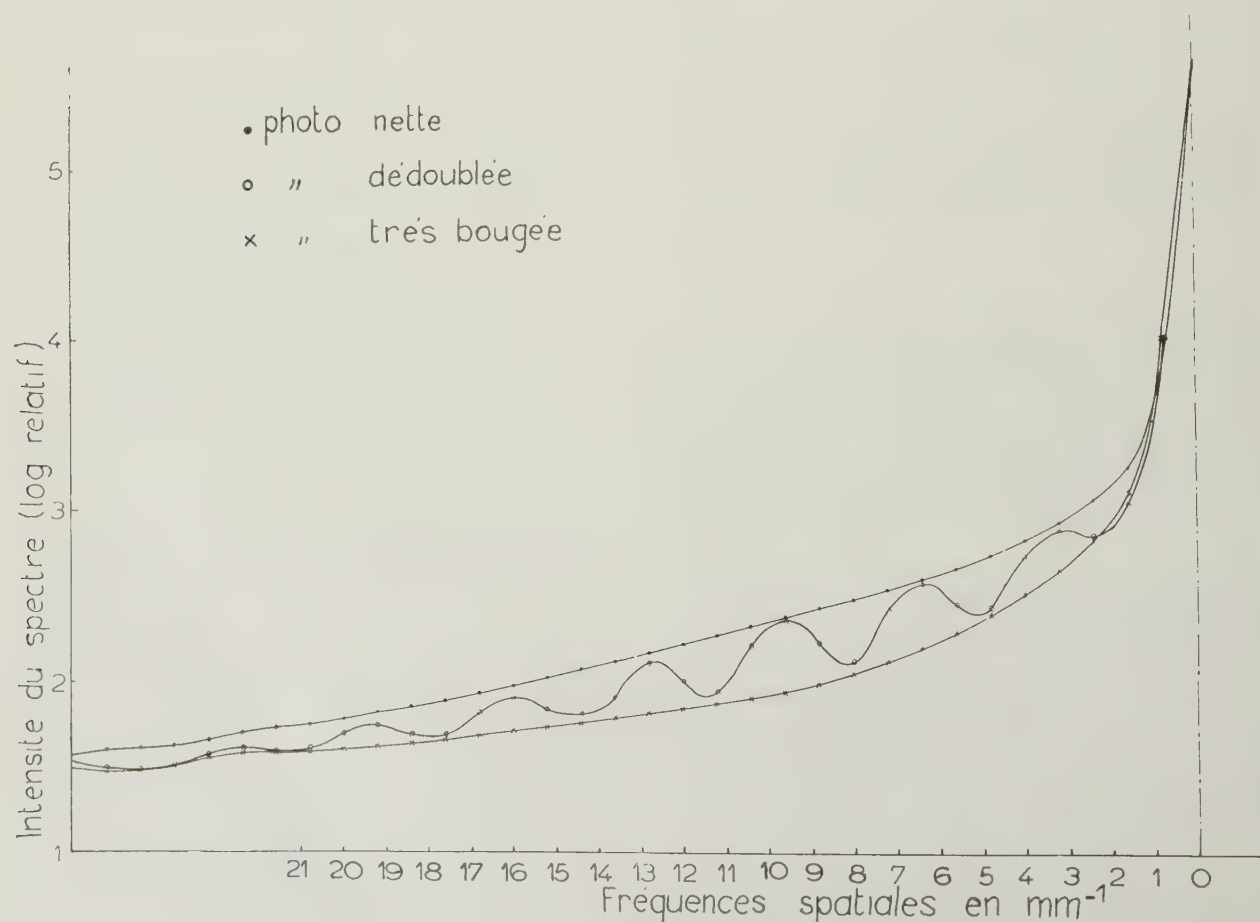
où D est la densité photographique, E l'éclairement à

la prise de vue, A et E_0 des constantes arbitraires.

Cette condition peut s'appliquer à des épreuves négatives ou positives. Nous nous sommes limités au cas des négatifs.

Après avoir obtenu des clichés situés dans une région de la courbe sensitométrique satisfaisant à la condition précédente, nous avons contrôlé la nature du spectre à l'aide d'un montage analogue à celui décrit dans une précédente note [2], la source utilisée étant une fente. Nous avons utilisé des séries de 3 clichés constituées par

- a) une photo nette ; durée d'exposition 2 fois $t/2$.
- b) une photo dédoublée ; obtenue en prenant deux photos du même objet ayant subi une translation



entre les 2 prises de vues de durée égale chacune à $t/2$.

c) une photo très bougée donnant le niveau du bruit (durée d'exposition 2 fois $t/2$).

Le spectre du cliché *b*) doit osciller entre les 2 spectres des clichés *a*) et *c*) et présenter une modulation dépendant de la translation.

Nous avons pu obtenir de telles courbes (fig. 1) avec des clichés d'étendue suffisamment petite, réalisés en

utilisant un voile préalable et une durée d'exposition 2 fois $t/2$ suffisamment faible.

RÉFÉRENCES

- [1] A. MARÉCHAL & P. CROCE, Problem in contemporary optics 1956, Amélioration de la perception des détails des images par filtrage optique des fréquences spatiales, p. 76-82.
- [2] P. CROCE & M^{me} M. MARQUET, *Opt. Acta*, vol. 2, 1955.

Manuscrit reçu le 12 mars 1956.

Adaptation d'un multiplicateur d'électrons à un spectrographe à plaques

J. LENOBLE

Laboratoire de Physique du Muséum.

Il existe maintenant dans le commerce d'excellents spectrophotomètres photoélectriques ; malheureusement leur prix élevé en rend l'acquisition difficile à beaucoup de laboratoires, qui, par contre, possèdent souvent de vieux spectrographes à plaques photographiques, de très bonne qualité optique ; il est généralement possible, sur ces appareils, de remplacer la chambre photographique par une cellule photoélectrique se déplaçant dans le plan du spectre ; cette modification n'entraîne ni difficultés techniques, ni dépenses exagérées. Nous décrivons ici un montage de ce type, qui peut fonctionner dans les régions visible et ultraviolette du spectre ; s'il ne prétend pas rivaliser avec l'élégance des appareils industriels, il nous permet d'atteindre, sans précautions spéciales, la précision de quelques % obtenue dans les meilleures conditions en photométrie photographique, et la courbe d'absorption d'une substance dans tout le spectre ultraviolet s'obtient en 40 mn, au lieu du travail de dépouillement de plusieurs jours qu'exigent les mesures photographiques.

Description de l'appareil. — Le spectrographe utilisé est un « spectrographe universel » de FRANZ SCHMIDT et HAENSCH, qui peut être monté pour enregistrer le spectre sur divers formats de plaques photographiques, permettre l'observation au moyen d'un oculaire, ou servir de monochromateur ; il peut être employé avec 1 ou 2 prismes, pour le visible ou l'ultraviolet ; dans le premier cas l'optique est en verre avec objectifs achromatiques, dans le deuxième elle est en quartz et, par suite du chromatisme des objectifs, le plan du spectre est fortement incliné sur l'axe. L'angle entre les axes du collimateur et de l'objectif de chambre est réglable, ainsi que le tirage des deux objectifs qui ont 60 cm de longueur focale ; la fente d'entrée f_1 est

verticale ; le bras portant l'objectif de chambre se termine par un solide rail R en queue d'aronde sur lequel viennent se fixer les diverses chambres photographiques, qui se raccordent à l'objectif par des tubes coulissants.

La cellule est un multiplicateur d'électrons du type LALLEMAND [1] à 7 étages et à fenêtre de verre extramince pour l'ultraviolet. La haute tension continue stabilisée est obtenue à partir du secteur 110 volts \sim dont les plus fortes variations sont amorties par un « régulateur » ; au moyen de potentiomètres on peut la faire varier entre 1300 volts et 2300 volts ; elle est appliquée à une chaîne de résistances qui sert de diviseur de tension et sur laquelle sont branchées les dynodes ; nous employons généralement une tension entre étages de 135 à 150 volts.

Le photomultiplicateur a été employé jusqu'ici en lumière modulée à 100 périodes par seconde et le courant de sortie modulé à la même fréquence est mesuré avec un millivoltmètre électronique Philips « G M 6017 » ; l'impédance d'entrée est de 1 M Ω , et, à la sensibilité maximum, une division de l'échelle de lecture correspond à 10^{-4} volts ; la précision de l'appareil est de 2 à 3 %. La sensibilité peut être augmentée par l'emploi d'un préamplificateur, mais on est alors assez vite limité par le bruit de fond du multiplicateur qui est de l'ordre de 3 10^{-10} A, soit 3. 10^{-4} volts sur une résistance de 1 M Ω .

Le multiplicateur est enfermé dans une boîte hermétique B (fig. 1) contenant un desséchant et munie d'un hublot de quartz ; devant le hublot est fixée une fente verticale f_2 de largeur et de hauteur réglable ; la plateforme P_1 portant la boîte du multiplicateur glisse sur 2 barres cylindriques G_1 et G_2 , portées elles-mêmes par une plateforme P_2 , de façon que la fente f_2 balaye le plan du spectre. Le mouvement est com-

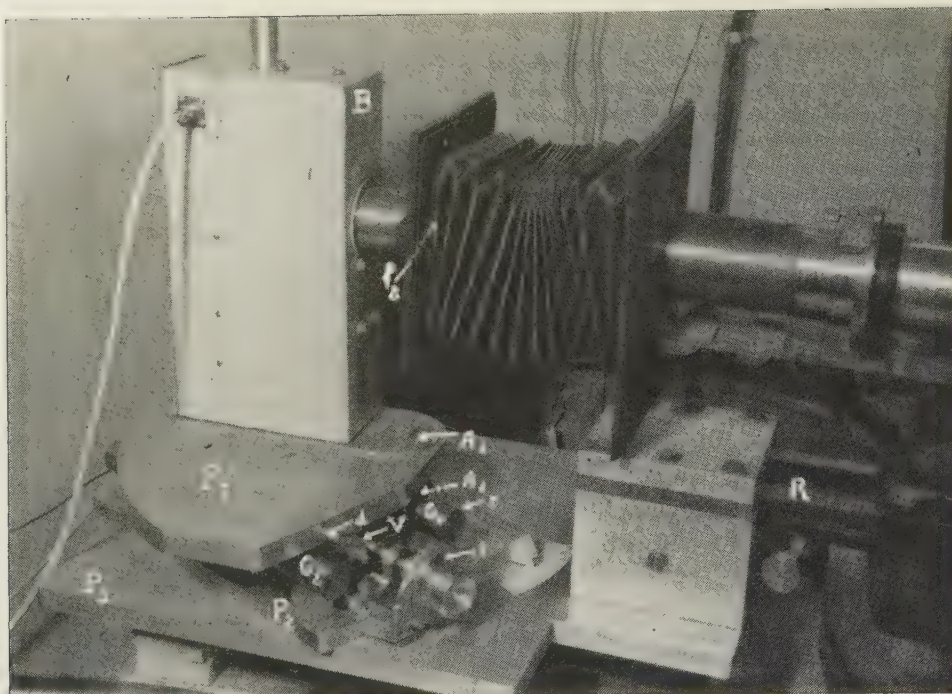


FIG. 1. — Multiplicateur d'électrons monté derrière le spectrographe, dans la position d'utilisation en ultraviolet.

mandé par une vis micrométrique V , les lectures étant faites sur la règle r (mm) et le tambour t (1/100 mm); une commande de débrayage d permet de faire glisser rapidement la plateforme P_1 à la main pour les réglages. L'axe défini par la fente f_2 et le centre de la photocathode est toujours parallèle à l'axe de l'objectif; un soufflet relie la fente f_2 au tube porte-objectif. L'ensemble du multiplicateur et de ces commandes de déplacement est porté par une large plateforme P_3 qui vient se fixer sur le rail R du spectrographe à la place des chambres photographiques. Le déplacement devant se faire toujours parallèlement au plan du spectre, pour l'utilisation dans l'ultraviolet la plateforme P_2 est inclinée comme on le voit sur la figure 1; pour l'utilisation dans le visible, on fait tourner P_2 sur P_3 autour d'un axe A_2 de façon à amener les barres de guidage G_1 — G_2 perpendiculaires à l'axe et, pour ramener l'axe du multiplicateur dans l'axe de l'objectif, on fait tourner la boîte B sur P_1 autour de l'axe A_1 ; cet axe A_1 est dans le prolongement de la fente f_2 et, à la position moyenne sur P_2 , ils viennent dans le prolongement de A_2 .

Résultats obtenus. — L'appareil a été essayé dans l'ultraviolet et le visible avec diverses sources; le changement d'optique et de position entre les deux régions du spectre se fait très rapidement. Les sources sont alimentées par le secteur stabilisé au moyen du « réguvolt »; pour les tubes à décharge fonctionnant en courant alternatif 50 périodes, le rayonnement

émis est modulé à 100 périodes; pour les lampes donnant une émission continue, la modulation est obtenue en faisant tourner devant la fente d'entrée, au moyen d'un petit moteur synchrone, un disque portant une série d'ouvertures.

L'étalonnage en longueurs d'ondes des graduations (r et t) sur lesquelles on repère la position du multiplicateur, a été fait avec les raies de la lampe à mercure; après plusieurs semaines de fonctionnement dans l'ultraviolet, nous n'avons jamais trouvé d'écarts supérieurs à 0,20 mm, ce qui correspond en longueurs d'onde à environ 2 Å vers 2500 Å et 6 Å vers 4000 Å; quand l'appareil a été déplacé ou changé de position, il est prudent de vérifier l'étalonnage.

Comme nous l'avons dit, la précision des lectures est limitée à quelques % par l'appareil de mesure lui-même; le courant débité sera compris entre le bruit de fond $3 \cdot 10^{-10}$ A et une valeur de 10^{-6} A qui ne peut être dépassé sans risque de détérioration de la cellule. Dans ces limites la stabilité est bonne: pour une radiation donnée, la réponse ne varie pas plus de 2 à 3 % en 2 h, si le multiplicateur ne reçoit pas un rayonnement trop intense qui produit des phénomènes de fatigue. Nous avons vérifié avec la lampe basse pression de mercure, qui ne présente pas de fond continu, que la lumière parasite diffusée dans l'optique et qui pourrait être reçue entre les raies n'est pas décelable. La proportionnalité courant-flux a été étudiée en faisant varier le flux reçu par le multiplicateur au moyen d'une série de diaphragmes placés devant l'objectif collima-

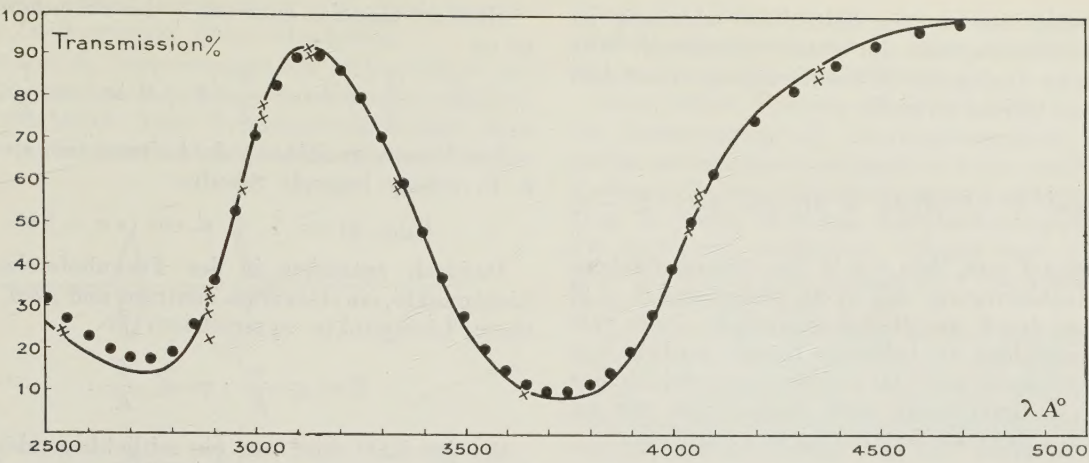


Fig. 2. — Transmission d'une solution de chromate de potassium dans l'ultraviolet.

— mesures avec une lampe à hydrogène
× mesures avec une lampe à mercure
• valeurs de G. W. HAUPT.

teur ; dans la limite de précision de quelques % et pour toute la zone d'emploi, la proportionnalité est bien vérifiée pour des rapports de flux de l'ordre de 1 à 100 ; pour des valeurs supérieures du rapport, le contrôle est plus délicat, et, de toute façon, il est plus sûr de diminuer le flux dans un rapport connu que d'utiliser la loi de proportionnalité dans une zone trop étendue.

A titre de contrôle, nous avons mesuré avec cet appareil la transmission dans l'ultraviolet d'une solution de chromate de potassium (0,04 g/l dans 0,05 N KOH) sous 1 cm d'épaisseur ; les résultats sont portés sur la figure 2 ; la courbe est la moyenne de 2 mesures faites sur le fond continu de la lampe à hydrogène à des intervalles d'environ 25 Å ; les croix représentent des mesures sur les raies d'une lampe à mercure ; enfin les points sont

les valeurs de G. W. HAUPT [2] pour cette même solution.

Il ne nous reste pour terminer qu'à remercier tous ceux qui nous ont aidé dans la réalisation de cet appareil, et tout spécialement, M. LALLEMAND Astronome titulaire de l'Observatoire de Paris, qui a mis à notre disposition un de ses multiplicateurs, et M. LAFFINEUR, Ingénieur de l'Institut d'Astrophysique, qui nous a fait construire l'alimentation haute tension ; leurs conseils éclairés nous ont été extrêmement précieux pour toute la partie électronique.

Manuscrit reçu le 6 décembre 1955.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. LALLEMAND, *Jl de Phys.* **10** (1949), 235.
- [2] G. W. HAUPT, *J. O. S. A.* **42** (1952), 441.

Optische Einseitenbandübertragung angewandt auf das Gabor-Mikroskop

A. LOHMANN

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Braunschweig

Neuerdings wurde verschiedentlich darauf hingewiesen, dass Analogien zwischen der elektrischen Netzwerktheorie und der optischen Abbildungstheorie bestehen wegen des gemeinsam benutzten FOURIER-Theorems [1]. Hier soll nun das optische Analogon zur elektrischen Ein-Seitenband-Übertragung (ESÜ) untersucht werden, und zwar bei der kohärenten Abbildung (zweifache FOURIER. Transformation der komplexen Amplitude).

Die Grundlagen der elektrischen ESÜ sind
1) Realität des Signals

$$F(t) = \int B(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \rightarrow B(\omega) = B^*(-\omega) ;$$

2) Wenn nur ein Seitenband $B(\omega)$ ($\omega \geq 0$) übertragen wird, muss daraus im Empfänger auch das andere Seitenband ($\omega \leq 0$) wiederhergestellt werden. Die Symmetriebeziehung 1) besagt, dass der Infor-

mationsgehalt im zweiten Seitenband abhängig ist vom Informationsgehalt im ersten Seitenband. Nun das optische Analogon: die Lichterregung hinter dem kohärenten Objekt sei reell:

$$U_0(x, y) =$$

$$\iint A(\xi, \eta) e^{ik(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \rightarrow A(\xi, \eta) = A^*(-\xi, -\eta)$$

ESÜ bedeutet nun, dass wir in der Fraunhoferebene von der Lichterregung $A(\xi, \eta)$ ein Seitenband ($\xi < 0$) ausschalten durch eine Halbebenenblende. Diese vom Schlierenverfahren her bekannte Blende verdirbt i. a. die Objektstreue im Bild. Das Analogon zum elektrischen Vorgang 2 funktioniert aber doch, wenn wir als Objekt ein « ZERNIKE-GABOR-Objekt » benutzen:

$$U_0(x, y) = 1 + \Delta U(x, y); A(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)$$

($\Delta u^2 \ll 1$; starkes Zentrum in der Fraunhoferebene, wie meistens in der Phasenkontrastmikroskopie).

Beweis:

$$\Delta U(x, y) = \int_{-\xi_A}^{+\xi_A} \int_{-\eta_A}^{+\eta_A} a(\xi, \eta) \cdot e^{ik(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta;$$

$$\tilde{\Delta u} = \int_0^{+\xi_A} \int_{-\eta_A}^{+\eta_A}$$

Die Intensität im ESÜ-Bild ist:

$$\tilde{F} = |1 + \tilde{\Delta u}|^2 \approx 1 + \tilde{\Delta u} + \tilde{\Delta u}^*$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta u}^* &= \int_0^{+\xi_A} \int_{-\eta_A}^{+\eta_A} a^*(\xi, \eta) \cdot e^{-ik(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\xi_A}^0 \int_{-\eta_A}^{-\eta_A} a(\xi, \eta) \cdot e^{+ik(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

(leicht zu erhalten mit $a(\xi, \eta) = a^*(-\xi, -\eta)$ und $(\xi, \eta) \rightarrow (-\xi, -\eta)$ also $\tilde{\Delta u} + \tilde{\Delta u}^* = \Delta u$, daraus $\tilde{F} = 1 + \Delta u$; $\tilde{F}^2 \approx F$).

Halbiert man das Zentrum in der Fraunhoferebene, so ist

$$\tilde{F} = \frac{1}{2} + \Delta u = \frac{1}{2} (1 + 2 \Delta u) \approx \frac{1}{2} F.$$

Zur Veranschaulichung denke man sich als Objekt z. B. schräg liegende Streifen

$$U_0(x, y) = 1 + a \cdot \cos(\alpha x + \beta y).$$

Dadurch entstehen in der Fraunhoferebene drei Lichtpunkte, ein starker im Zentrum und zwei schwächere Lichtpunkte symmetrisch in

$$\xi = \pm \frac{\alpha}{K}; \eta = \pm \frac{\beta}{K}.$$

Bei der ESÜ wird nun ein seitlichliegender Lichtpunkt weggeblendet, aber die beiden restlichen Lichtpunkte geben im wesentlichen die Streifen des Objektes wieder.

Nun wollen wir die ESÜ mit dem Prinzip des GABOR-Beugungs-Mikroskopes [2] verbinden, dargestellt in Figur 1. Wir photographieren also das Hologramm im Bildraum des Analysis-Apparates, d. h. die Intensität:

$$|e^{ikz} + \tilde{\Delta u}(x, y, z)|^2 \approx 1 + \tilde{\Delta u} \cdot e^{-ikz} + (\tilde{\Delta u} \cdot e^{-ikz})^*$$

Normalerweise geben Δu und Δu^* im Synthesis-Apparat die beiden sich gegenseitig störenden Zwillingbilder, die in der Tiefe symmetrisch zum Hologrammbild liegen. Jetzt können wir die beiden Zwillingbilder getrennt beeinflussen, weil ihre Spektren $\tilde{\Delta u}$ und $\tilde{\Delta u}^*$ räumlich getrennt nebeneinander in der Fraunhoferebene des Synthesis-Apparates liegen. Es ist leicht zu erreichen, dass die Zwillingbilder in der gleichen Bildebene liegen, z. B. mit einer halben Kugellinse und einer Planplatte zur Kompensation der Phasen. Dasselbe kann man auch mit polarisationsoptischen Mitteln erreichen (zweiteiliges $\lambda/2$ -Blatt in F_S , doppelbrechende bifokale Linse). Man kann auch mit einer Schlierenblende in F_S das Zwillingbild

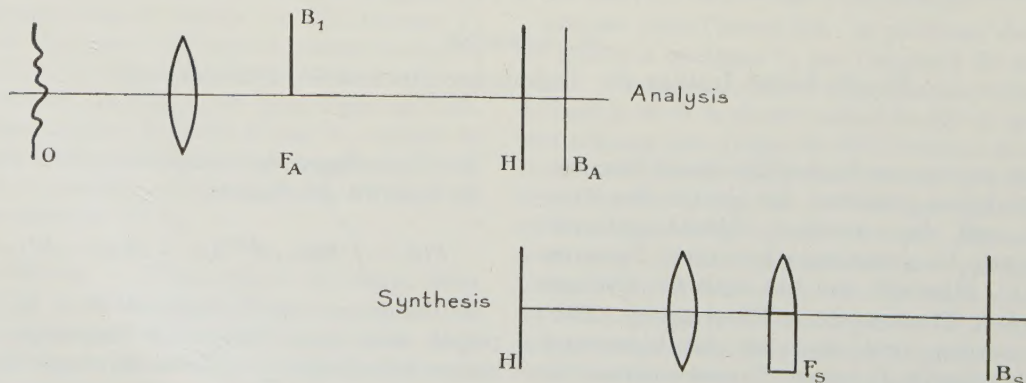


FIG. 1. — Prinzip der GABOR-ESÜ-Kombination.

O : Objekt ; F : Fraunhofer-Ebene ; B1 : Esü- oder Schlierenblende ; H : Hologramm ; B : Bild.

eliminieren, anstatt es künstlich in die Bildebene des anderen Zwillingsbildes hinein abzubilden.

Es sind auch Erweiterungen der ESÜ-Methode auf andere Symmetrie-Relationen des Objektes möglich. Besitzt das Objekt keine Symmetrieeigenschaft, dann kann man die gesamte Information in zwei verschie-

denen ESÜ-Prozessen gewinnen und interferometrisch wieder zusammensetzen in einer ähnlichen Weise, wie es GABOR [3] vorgeschlagen hat.

Eine weitere Variante der ESÜ beruht darauf, dass die Lichterregung als Übertragungsmittel den doppelten Informationswert besitzen kann, wenn man die Zerlegung in zwei Polarisationskomponenten ausnutzt (Fig. 2). Dann kann man bei gleicher Aperturblende die Auflösung verdoppeln. Objekt und Kohärenzgrad [4] dürfen jetzt beliebig sein. Die Aperturblende muss rechteckig sein.

Bei kohärenter Abbildung würden gekreuzte Polarisatoren einen Phasenunterschied von 180° zwischen beiden « Seitenbändern » bedeuten. Man hat dann zusätzlich das Woltersche Minimumstrahlverfahren [5] wellenlängenunabhängig und mit doppelter Apertur realisiert. Eine experimentelle Untersuchung wird z. Zt. vorbereitet. Für Diskussionen bin ich Herrn Prof. Dr G. CARIO, Dr D. GABOR und Mr M. DE (London) zu Dank verpflichtet.

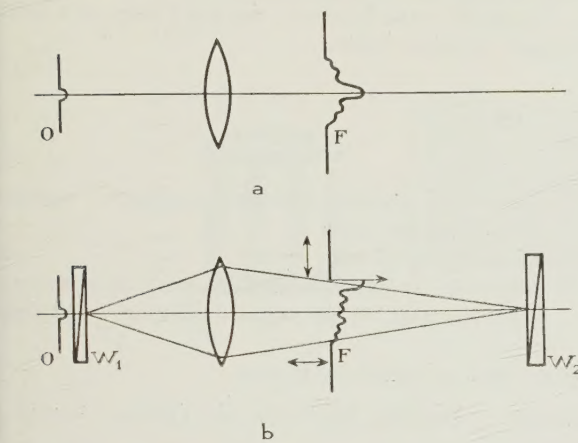


FIG. 2. — Bandverdoppelung durch Ausnutzung der Polarisation.

- a) Normale mikroskopische Abbildung. In F die Fraunhoferebene, dort (schematisch) das Fourierspektrum.
- b) Beide Seitenbänder zunächst verschieden polarisiert und abgelenkt durch ein Wolastonprisma W, sodass man insgesamt mit doppelt so breitem Beugungsspektrum abbildet. In F bringt jede Polarisationskomponente ein Seitenband durch die Aperturblende (nur ein Seitenbd. schem. gezeichnet).

[1] z. B. O. H. SCHADE in « Optical Image Evaluation », S. 231, NBS-Circ. 526, 1954.
— P. ELIAS, J. O. S. A. **43**, 1953, 229 ; J. E. RHODES, J. O. S. A. **43**, 1953, 848.
[2] D. GABOR, Proc. Roy. Soc. **A 197**, 1949, 454 ; Proc. Phys. Soc. B **64**, 1951, 449.
[3] D. GABOR, Washington Conference on Electron Microscopy, NBS, nov. 1951.
[4] H. H. HOPKINS, Proc. Roy. Soc. **A 217**, 1953, 408.
[5] H. WOLTER, Ann. Phys. (6) **7**, 180 u. 1951, 341.

Manuscrit reçu le 9 mars 1956.

BIBLIOGRAPHIE

L. BERGMANN und Cl. SCHAEFER, *Lehrbuch der Experimentalphysik*. Verlag W. de Gruyter, Berlin. 3 Bände.
Von diesem Werk ist nunmehr der erste Teil des dritten Bandes erschienen. Damit kann man einen Überblick über die gesamte Anlage gewinnen :
Die Frage, welches Buch man als « Lehrbuch der Physik » schlechthin empfehlen könne, brachte den beratenden Fachgenossen bisher in einige Verlegenheit. Denn seit dem Verschwinden des alten MÜLLER-POUILLET fehlte ein deutschsprachiges Werk, das die physikalischen Tatsachen in grossem Zusammenhange, etwa in der Art der üblichen Hauptvorlesung, darstellt. Bei dieser Aufgabe liegt die Schwierigkeit in der Beschränkung. Der Verfasser ist der Verführung ausgesetzt, durch eine grosse Zahl eleganter Versuche der Darstellung einen besonderen Glanz zu verleihen. Damit besteht aber die Gefahr, dass das Grundsätzliche des Versuches verdeckt wird und das Wesentliche von dem Beiwerk kaum zu trennen ist. Deshalb hatten sich die Verfasser das Ziel gesetzt, an Hand von möglichst einfachen und damit leicht durchschaubaren Versuchen das gesamte Gebiet der physikalischen Erscheinungen zu behandeln. Man kann dabei nicht die grundlegenden theoretischen Vorstellungen unterdrücken ; denn erst sie stellen den Ariadnefaden in

dem Labyrinth des Beobachtungsmaterials dar. Aber auch hier bedarf es eines grossen Einfühlungsvermögens in die künftigen Leser, um die Grenzen zu kennen. Diesem ausserordentlichen pädagogischen Geschick verdankt das Werk von BERGMANN und SCHAEFER seine wohlabgewogene Auswahl der Versuche und Erläuterungen.
Der erste Band (4. Auflage 1954, 622 Seiten) behandelt die Mechanik, Akustik und Wärmelehre und ist seit der 1. Auflage im Wesentlichen unverändert geblieben.
Im zweiten Band (2. Auflage 1956, 507 Seiten) wird die Elektrizitätslehre in der klassischen Einteilung behandelt, wie sie auch in grossen Zügen der historischen Entwicklung und der Forderung nach einem didaktisch geschickten Aufbau entspricht. Nach den statischen elektrischen und magnetischen Feldern werden die stationären Ströme und ihre Felder dargestellt. Die Betrachtung der Induktionswirkungen leitet aber zu den elektrischen Schwingungen und Feldern. Die drei letzten Kapitel beschäftigen sich mit der elektrischen Leitung in Flüssigkeiten, Gasen und festen Körpern. Hier ist gegenüber der ersten Auflage der Abschnitt über die Halbleiter neu.
Vom dritten Band liegt bisher nur der erste Teil

vor « *Wellenoptik* » (1956, 424 Seiten) während der zweite Teil « *Atomphysik* » noch im Laufe dieses Jahres erscheinen soll. Auch hier ist das Hauptgewicht der Darstellung auf das Grundsätzliche gelegt. In dem Abschnitt über die geometrische Optik verdient die Behandlung der Strahlenbegrenzung, der Linsenwirkung und der Bildfehler eine besondere Erwähnung wegen der im Rahmen eines allgemeinen Physikbuches selten so geschickten Darstellung. Bei der Dispersion,

Interferenz und der Polarisierung, die ohne theoretische Betrachtungen unverständlich bleiben müssen, gehen die Betrachtungen weit über die reine Phänomenologie eines Lehrbuches der *Experimentalphysik* hinaus. Hier kommt den Verfassern die Erfahrung einer langen Lehrtätigkeit sowohl in der theoretischen als auch der experimentellen Physik zustatten. Ihr verdanken diese Abschnitte eine Klarheit, die das Lesen zu einem Vergnügen werden lässt.

INFORMATION

C'est avec grand plaisir que nous vous annonçons la parution du volume « *Problems in Contemporary optics* », comptes rendus de la réunion tenue à Florence, sur ce sujet, du 10 au 16 septembre 1954.

N'ayant pu encore en effectuer l'analyse, nous nous bornons à rappeler ci-dessous les principales rubriques de cet ouvrage qui promet d'être du plus grand intérêt pour tous ceux qui s'intéressent à l'évolution actuelle de l'optique :

Retinal problems ;

Non-classical focussing devices (variable refractive index microwave metallic lenses, Rinehart-

Luneberg sheets, random gratings, plastic Fresnel lenses, etc.) ;

Optical problems of television ;

3 D (including collateral subjects such as anamorphic systems, wide screen moving pictures, etc.) ;

Optics and information theory.

Editeur : Istituto Nazionale di Ottica, Arcetri-Firenze.

Prix : 6 000 liras italiennes.

A. MARÉCHAL.

ERRATUM

Druckfehlerberichtigung zur Arbeit :

“ J. Picht, Zur Frage der optischen Lichtweglängen zweier Strahlen zwischen Objektpunkt und bildseitigem Schnittpunkt beider Strahlen ”.

Optica Acta, Vol. III, Nr. 1, S. 1 — 9

Gleichung (2,8) 2. Zeile fehlt hinter “ + ... ” die “) ”.

In der nächsten Reihe derselben Gleichung muss es

im 3. Glied statt “ $\text{tg}^5 k_1$ ” richtig heißen “ $\text{tg}^5 k'$ ”.

In der 2. Spalte der Seite 6, letzte nicht numerierte Gleichung für ξ muss es heißen : “ ξ_1 ”.

In der 1. Klammer muss es statt “ — 1 ” richtig heißen : “ 1 — ”.

In den Abbildungen 3, 4, 5 muss es jeweils statt “ + $\text{tg} k'$ ” rich — tig heißen “ + $\text{tg} k'$ ”.